MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Esame 5 Settembre 2012

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma .... SOLUZIONI

1	2	3	4	5	6	7	8	TOT

1. *(4 p.ti)* Si vuole rimborsare un debito iniziale D, ad un tasso annuo nominale i con rate semestrali a quota capitale costante non superiori a 100 Euro

   Dati: $i = 10\%, D = 1500$

   $i = 8\% \to N = 38$
   $i = 10\% \to N = 61$
   $i = 11\% \to N = 86$
   $i = 12\% \to N = 151$

   Determinare il minimo numero di rate N necessario a rimborsare il debito

   Svoglimento: *(4 p.ti)*:

Il rimborso è a q.c. costante, quindi la prima rata è la maggiore. Il vincolo è soddisfatto se

$$R_1 = \frac{D}{n} + i_{sem} D < 100 \implies n > \frac{D}{100 - i_{sem} D}$$

dove $i_{sem} = i/2$

il numero minimo di rate è dato dall'approssimazione per eccesso del numero $\frac{D}{100 - i_{sem} D}$

2. *(2+2=4 p.ti)* Una rendita perpetua posticipata con pagamenti **SEMESTRALI** di importo A viene acquistata ad un prezzo P.

   Dati: $A = 20, P = 400$

   Calcolare il TIR **ANNUO** i dell'operazione finanziaria.

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   $P = 300 \to i = 13,78\%$
   $P = 400 \to i = 10,25\%$
   $P = 600 \to i = 6,78\%$
   $P = 800 \to i = 5,06\%$

   (a) $0 \le i < 2\%$
   (b) $2\% \le i < 4\%$
   (c) $4\% \le i < 6\%$
   (d) $6\% \le i < 8\%$
   (e) $8\% \le i < 10\%$
   (f) $10\% \le i < 12\%$
   (g) $12\% \le i$

   Svolgimento: *(2 p.ti)*:

Il TIR semestrale è $i_s = A/P$

quindi il TIR annuo è

$$i = \left(1 + \frac{A}{P}\right)^2 - 1$$

3. *(4 p.ti)* Consideriamo due titoli rischiosi. I rendimenti attesi sono rispettivamente $\bar{r}_1, \bar{r}_2$, le volatilità σ_1, σ_2, la correlazione ρ.

   Dati: $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2, \bar{r}_1 = 0.2, \bar{r}_2 = 0.4, \rho = 0.5$

   Determinare valore atteso e varianza del rendimento del portafoglio

$$\omega = (1/4, 3/4)$$

$E = 0,35$

$\sigma^2 = 0,0268$

Svolgimento: *(4 p.ti)*:

$$E = \frac{1}{4}\bar{r}_1 + \frac{3}{4}\bar{r}_2$$

$$V = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sigma_1^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sigma_2^2$$

4. *(4 p.ti)* In un mercato con 3 titoli i portafogli

$$w_1 = (1/2, 0, 1/2), \quad w_2 = (1/2, 1/2, 0)$$

sono efficienti.

Stabilire se il portafoglio

$$w_3 = (0, 1/2, 1/2)$$

è efficiente.

Svolgimento: *(4 p.ti)*:

Il portafoglio è efficiente se e solo se può ottenersi tramite combinazione lineare dei due portafogli efficienti (Teorema dei due fondi).

Quindi w_3 è efficiente se e solo se la matrice A è singolare

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

dato che $\det A \neq 0$ il portaf. w_3 <u>NON</u> è efficiente.

5. *(2+2=4 p.ti)* Il costo iniziale di un investimento che genera ricavi per 1 euro dopo un anno e per x euro dopo tre anni è 2 euro.
Determinare il valore minimo di x per il quale l'investimento risulti convenienti rispetto al tasso annuo i.
Dati:

$i = 6\%$

$i = 10\% \to x = \cancel{1.57}\ 1.45$
$i = 6\% \to x = \cancel{1.72}\ 1.825$
$i = 7\% \to x = \cancel{1.68}\ 1.50$
$i = 8\% \to x = \cancel{1.64}\ 1.55$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $x < 2.5$
(b) $2.5 < x < 2.7$
(c) $2.7 < x < 2.8$
(d) $2.8 < x$

Svolgimento: *(2 p.ti)*:

$$2 = (1+i)^{-1} + x(1+i)^{-3} \Rightarrow x = \frac{2-(i+1)^{-1}}{(1+i)^{-3}}$$

6. *(2+2=4 p.ti)* Calcolare la duration D di un'obbligazione che scade tra 2 anni con flusso di pagamenti $(3, 103)$, sapendo che il prezzo dello ZCB con scadenza tra 1 anno è P_1 e il prezzo dello ZCB con scadenza tra 2 anni è P_2
Dati: $P_1 = 98, P_2 = 96$

$P_2 = 95 \to D = 1.97$
$P_2 = 96 \to D = 1.97$
$P_2 = 94 \to D = 1.97$
$P_2 = 97 \to D = 1.97$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $0 < D < 1.50$
(b) $1.50 \leq D < 1.90$
(c) $1.90 \leq D < 1.95$
(d) $1.95 \leq D < 2.00$
(e) Nessuno dei precedenti.

Svolgimento: *(2 p.ti)*

$$D = \frac{3V_1 + 2 \cdot 103 \cdot V_2}{3V_1 + 103V_2}$$

dove $V_1 = P_1/100$ $\qquad$ $V_2 = P_2/100$

7. Rispondere alla seguente domanda *2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata*

   Quale delle seguenti situazioni, se verificata, consentirebbe certamente un arbitraggio?

   (a) Una struttura per scadenza dei tassi a pronti crescente

   (b) Una struttura per scadenza dei tassi a pronti decrescente

   (c) Una struttura per scadenza dei fattori di sconto crescente

   (d) Una struttura per scadenza dei fattori di sconto decrescente

   (e) nessuna delle precedenti

8. *(6 p.ti)* Sia $V(i) = \sum_{k=1}^{n} x_k(i+1)^{-t_k}$ il valore al tempo 0, in funzione del tasso di interesse annuo i del flusso di importi positivi $x_1, \ldots, x_n$, pagati agli istanti $t_1, \ldots, t_n$ (tempo misurato in anni) e $D(i)$ la sua duration. Mostrare che

$$V'(i) = -\frac{D(i)}{1+i}V(i)$$

Dato

$$V(i) = \sum_{k=1}^{n} x_k (1+i)^{-t_k}$$

derivando rispetto a i si ottiene

$$V'(i) = -\sum_{k=1}^{n} t_k x_k (1+i)^{-t_k-1}$$

$$= -\frac{1}{1+i} \sum_{k=1}^{n} t_k x_k (1+i)^{-t_k}$$

quindi:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -\frac{1}{1+i} \frac{\sum t_k x_k (1+i)^{-t_k}}{V(i)}$$

$$= -\frac{1}{1+i} D(i)$$

dove $D(i) = \frac{\sum t_k x_k (1+i)^{-t_k}}{V(i)}$

è la duration rispetto al tasso costante i.