MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Esame 19 Settembre 2012

Cognome e Nome ....SOLUZIONI.... Matricola ....

Firma ....

1	2	3	4	5	6	7	8	TOT

1. *(2+2=4 p.ti)* Un titolo rimborsa 88 euro ogni anno per sempre a partire dal prossimo anno. Sia i_s il tasso semestrale.
   Dati: $i_s = 3\%$

   Utilizzando la legge degli interessi composti, determinare il valore attuale V del titolo.

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   $i_s = 2\% \to V = 2178$
   $i_s = 3\% \to V = 1444$
   $i_s = 4\% \to V = 1078$
   $i_s = 5\% \to V = 858$

   (a) $V < 4000$
   (b) $4000 < V < 4500$
   (c) $4500 < V < 5000$
   (d) $V > 5000$

   Svolgimento: *(4 p.ti)*:

   $$V = \frac{88}{i_a}$$

   dove $i_a = (1+i_s)^2 - 1$

2. *(2+2=4 p.ti)*

   La costruzione di un nuova linea metropolitana ha un costo iniziale di 12 milioni di Euro. Si stima che nei successivi 4 anni il traffico passeggeri genererà la seguente successione di flussi di cassa positivi (in milioni di euro) $X = (2; 2; 5; 5)\|(1; 2; 3; 4)$ di cui beneficerà la società costruttrice, e che , nel medesimo arco temporale, la struttura dei tassi a pronti sarà (d_1, d_2, d_3, d_4).

   Dati: $d_1 = 0.9, d_2 = d_3 = d_4 = 0.8$
   Calcolare V, il VAN dell'investimento. *(2 p.ti)*

   $12.1 - 12 = 0.1$
   $11.4 - 12 = -0.6$
   $11.6 - 12 = -0.4$
   $11.9 - 12 = -0.1$

   (a) $V < 0$
   (b) $0 < V < 1$
   (c) $1 < V < 2$
   (d) $2 < V < 3$
   (e) $3 < V < 4$
   (f) $V > 4$

   Svolgimento: *(2 p.ti)*:

   $$V = -12 + 2d_1 + 2d_2 + 5d_3 + 5d_4$$

3. *(4 p.ti)* Consideriamo tre titoli rischiosi con rendimenti indipendenti ed i cui rendimenti attesi sono rispettivamente $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ e le volatilità $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Dati: $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2, \sigma_3 = 0.3 \bar{r}_1 = 0.2, \bar{r}_2 = 0.4, \bar{r}_3 = 0.5$

Determinare valore atteso e varianza del rendimento del portafoglio

$$\omega = (2/7, 4/7, 1/7)$$

$Er = 0{,}3571$

$Var(r) = 0{,}01571$

Svoglimento: *(4 p.ti)*:

$E(r) = \omega_1 \cdot \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2 + \omega_3 \bar{r}_3$

$Var(r) = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + \omega_3^2 \sigma_3^2$

(Notare che non ci sono i termini di covarianza in quanto i rendimenti sono indipendenti).

4. *(2+2=4 p.ti)* In un mercato di 3 titoli i portafogli $(1/2, 0, 1/2)$ e $(0, 1, 0)$ sono efficienti. Consideriamo i portafogli $A = (1, 0, 0)$ e $B = (-1/2, 2, -1/2)$.

Se ne deduce: *(2 p.ti)*

(a) A è efficiente B no

~~(b)~~ B è efficiente A no

(c) A e B sono efficienti

~~(d)~~ A e B non sono efficienti

Svoglimento: *(2 p.ti)*:

Per il teorema dei due fondi, ~~dato~~ un portafoglio è efficiente se e solo se può esprimersi come combinazione di due ptf. efficienti. Quindi il portaf. A è efficiente se e solo se la matrice

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$ ha rango 2

dato che M_1 ha rango 3, A <u>non</u> è efficiente.

Analogamente, il rango della matrice

$$M_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$ è 2, quindi ~~[illegible]~~ B ~~[illegible]~~ è efficiente.

5. *(2+2=4 p.ti)* Calcolare la duration D di un'obbligazione che scade tra 3 anni con flusso di pagamenti $(3, 3, 103)$, sapendo che il prezzo dello ZCB con scadenza tra 1 anno è P_1 e il prezzo dello ZCB con scadenza tra 2 anni è P_2 il prezzo dello ZCB con scadenza tra 3 anni è P_3
Dati: $P_1 = 98, P_2 = 96, P_3 = 93$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

D= 2.91
2.91
2.91
2.91

(a) $0 < D < 1.50$
(b) $1.50 \leq D < 1.90$
(c) $1.90 \leq D < 1.95$
(d) $1.95 \leq D < 2.00$
(e) Nessuno dei precedenti.

Svoglimento: *(2 p.ti)*

$$D = \frac{3d_1 + 3d_2 \cdot 2 + 103 d_3 \cdot 3}{3d_1 + 3d_2 + 103 d_3}$$

dove $d_1 = P_1/100$ $\quad d_2 = P_2/100$ $\quad d_3 = P_3/100$

6. *(2+2=4 p.ti)* Un investitore ha investito il 30% di un patrimonio di 10000 in obbligazioni di duration D_1, il 50% in obbligazioni di duration D_2 e il 20% in obbligazioni di duration D_3. Supponiamo che il livello dei tassi passi da $i_0 = 5\%$ annuo a $i = i_0 + 0.2\%$. Determinare il nuovo valore X dell'investimento.

Dati:
$D_1 = 1, D_2 = D_3 = 1.5$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

X= 9978
9973
9962
9860

(a) $X < 8000$
(b) $8000 < X < 9000$
(c) $9000 < X < 10000$
(d) $X > 10000$

Svolgimento: *(2 p.ti)*:

La duration dell' investimento è

$$D = 0.3\, D_1 + 0.5\, D_2 + 0.2\, D_3$$

Secondo la regola del pollice:

$$X = V(i_0 + h) = -V(i_0) \cdot \frac{D}{1+i_0} \cdot h + V(i_0)$$

dove $h = 0.002$ e $V(i_0) = 10'000$

7. Rispondere alla seguente domanda (*2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata*).
Se il prezzo di un' obbligazione scende, il suo "yield to maturity"...

(a) scende
~~(b)~~ sale
(c) sale solo se l'obbligazione paga cedole
(d) sale solo se l'obbligazione non paga di cedole
(e) nessuna delle precedenti

8. *(6 p.ti)* La regola del $7-10$ dice che affinchè un capitale raddoppi al tasso del 7% annuo occorre attendere circa 10 anni (mentre al tasso del 10% annuo occorre attendere circa 7 anni).
Dimostrare in modo analogo, utilizzando il fatto che $\log(3) \approx \frac{11}{10}$, che affinchè il capitale in 10 anni triplichi il tasso deve essere circa dell'11%.

Si vuole risolvere rispetto a i la seguente equazione:

$$3C = C(1+i)^{10}$$

dove C rappresenta il capitale investito al tempo 0.
La soluzione ovviamente non dipende da C ed è:

$$\log(3) = 10 \log(1+i)$$

ora, utilizzando

$$\log(3) \approx 11/10$$

e

$$\log(1+i) \approx i$$ (sviluppo al primo ordine della formula di Taylor)

si trova:

$$11/10 \approx 10 \cdot i$$

cioè $i \approx 11/100 = 11\%$