MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Esame 12 Giugno 2013

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma ....

SOLUZIONI

1	2	3	4	5	6	7	8	TOT

TUTTE LE RISPOSTE SONO APPROSSIMATE ALLA SECONDA CIFRA DOPO LA VIRGOLA!
E' vietato l'uso di libri e quaderni. Tempo a disposizione 2 ore e 30 minuti.

1. *(2+2=4 p.ti)* In un piano di ammortamento a quota capitale costante, il debito iniziale è D, il numero delle rate è N e l'importo della prima quota interesse è I_1.

   Dati: $D = 1800, N = 12, I_1 = 150$

   $I_1 = 110 \rightarrow R_2 = 250.8\bar{3}$ (b)
   $I_1 = 200 \rightarrow R_2 = 333.\bar{3}$ (d)
   $I_1 = 150 \rightarrow R_2 = 287.5$ (c)
   $I_1 = 100 \rightarrow R_2 = 241.\bar{6}$ (a)

   Determinare l'importo della SECONDA rata R_2

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $0 \leq R_2 < 245$
   (b) $245 \leq R_2 < 260$
   (c) $260 \leq R_2 < 300$
   (d) $300 \leq R_2 < 350$
   (e) Nessuno dei precedenti.

   Svoglimento: *(2 p.ti)*:

   $R_2 = C + I_2$

   dove $C = D/N$ e $I_2 = D_1 \cdot i$

   D_1 è il debito residuo dopo il pagamento della prima rata, cioè: $D_1 = D - C$

   il tasso di interesse i si ottiene da $I_1 = D \cdot i$

   quindi $i = I_1/D$

2. *(2+2=4 p.ti)* Le due successioni di flussi di cassa $(-100, I, I, I, I, I, 100 + I)|(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e $(-C, 150)|(0, 5)$ (dove il tempo è espresso in anni) hanno lo stesso TIR. Calcolare il valore C.

   Dato: $I = 5$

   $I = 10 \rightarrow C = 93.13$ (b)
   $I = 0 \rightarrow C = 150$ (e)
   $I = 5 \rightarrow C = 117.53$ (c)
   $I = 20 \rightarrow C = 60.28$ (a)

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $0 \leq C < 70$
   (b) $70 \leq C < 100$
   (c) $100 \leq C < 120$
   (d) $120 \leq C < 140$
   (e) Nessuno dei precedenti.

   Svoglimento: *(2 p.ti)*:

   Il primo flusso rappresenta un titolo quotato alla pari, quindi il suo TIR è $i = \frac{I}{100}$

   pertanto deve essere $C = 150(1+i)^{-5} = 150\left(1+\frac{I}{100}\right)^{-5}$

3. *(2+2=4 p.ti)* Un portafoglio è composto da obbligazioni di duration $D_1 = 2$ anni e $D_2 = 10$ anni. Se il portafoglio ha Duration D e valore attuale V, qual è il valore V_1 dell'investimento nelle obbligazioni di Duration D_1?

Dati: $[D = 7, V = 200]$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

$V = 150 \rightarrow 56.25$ (b)
$V = 400 \rightarrow 150$ (e)
$V = 200 \rightarrow 75$ (c)
$V = 300 \rightarrow 112.5$ (d)

(a) $0 \leq V_1 < 50$
(b) $50 \leq V_1 < 65$
(c) $65 \leq V_1 < 85$
(d) $85 \leq V_1 < 120$
(e) Nessuno dei precedenti.

Svolgimento: *(2 p.ti)*

Sia α la percentuale del valore totale investita nelle obbligazioni di duration D_1 e $(1-\alpha)$ il resto.

Allora:
$$D = \alpha D_1 + (1-\alpha) D_2$$

quindi
$$\alpha = \frac{D - D_2}{D_1 - D_2}$$
e di conseguenza
$$V_1 = \alpha V$$

4. *(2+2=4 p.ti)* Con gli stessi dati dell'esercizio precedente. Se lo yield to maturity del portafoglio passa dal valore i_0 al valore i', calcolare la variazione di valore $\Delta V = V(i') - V$ del portafoglio.
Dati: $[i_0 = 5.45\%, i' = 5.70\%]$

$V = 150 \rightarrow -2.49$ (d)
$V = 400 \rightarrow -16.63$ (c)
$V = 200 \rightarrow -3.32$ (d)
$V = 300 \rightarrow -4.98$ (d)

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $-50 \leq \Delta V < -25$
(b) $-25 \leq V_1 < -15$
(c) $-15 \leq V_1 < -5$
(d) $-5 \leq V_1 < 5$
(e) $5 \leq V_1 < 15$
(f) $15 \leq V_1 < 25$
(g) $25 \leq V_1 < 50$
(h) Nessuno dei precedenti.

Svolgimento: *(2 p.ti)*

La "regola del pollice" (approssimazione al primo ordine della funzione valore) dice che

$$\Delta V \approx -\frac{1}{1+i_0} D V_0 (i' - i_0)$$

5. *(4 p.ti)* Un mercato è composto da tre titoli rischiosi aventi rendimenti indipendenti. I rendimenti attesi sono rispettivamente $\bar r_1, \bar r_2, \bar r_3$ e le deviazioni standard $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. L'investimento di 150 mila Euro nel primo titolo e 50 mila Euro nel terzo titolo è efficiente?

Dati: $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 2, \bar r_1 = 1, \boxed{\bar r_2 = 2, \bar r_3 = 1}$

IL PORTAFOGLIO NON È EFFICIENTE

$\boxed{\bar r_2 = 1,\ \bar r_3 = 2 \quad r_2 = 1,\ r_3 = 2}$ $\boxed{r_2 = 2,\ r_3 = 1 \quad r_2 = 2,\ r_3 = 1}$

Svolgimento: *(4 p.ti)*

Affinché un portafoglio $\vec w$ sia efficiente è necessario e sufficiente che il vettore $\Sigma \vec w$ sia linearmente dipendente dai vettori $\vec 1$ e $\bar r$. Dato che $\vec 1$ e $\vec r$ sono fra loro indipendenti basta calcolare il rango di

$$[\Sigma \vec w \,|\, \vec 1 \,|\, \bar r],$$

dove

$$\vec w = \begin{pmatrix} 150/200 = 3/4 \\ 0 \\ 50/200 = 1/4 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \quad \vec 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

6. *(4 p.ti)* Con gli stessi dati dell'esercizio precedente, calcolare il rendimento atteso e la varianza del rendimento dell'investimento, rappresentandone i valori nel piano media-deviazione standard assieme a quelli corrispondenti ai tre titoli rischiosi.

Svoglimento e grafico: *(4 p.ti)*

Il rendimento atteso è dato da

$$\bar r_p = \frac{3}{4}\bar r_1 + \frac{1}{4}\bar r_3$$

$\boxed{\bar r_2 = 1,\ \bar r_3 = 2 \quad r_2 = 1,\ r_3 = 2}$ ← caso A

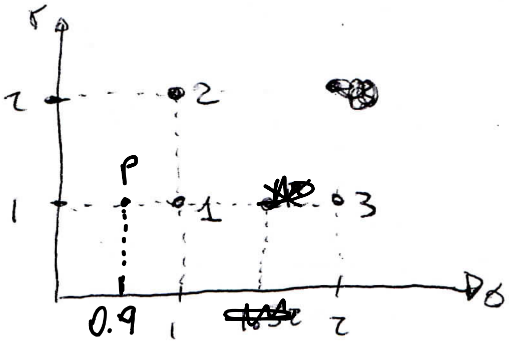
$\boxed{r_2 = 2,\ r_3 = 1 \quad r_2 = 2,\ r_3 = 1}$ ← caso B

La varianza è

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sigma_2^2$$

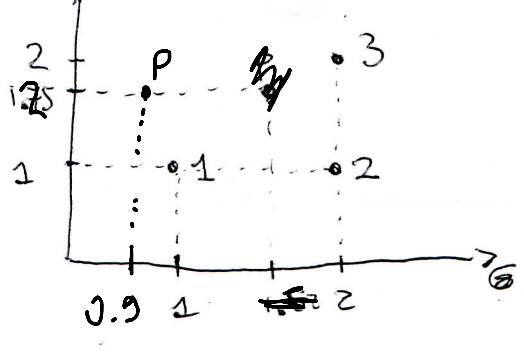
caso B:

$$\bar r_p = 1$$
$$\sigma_p = \cancel{1.52}\ 0.90$$



caso A:

$$\bar r_p = 1.25$$
$$\sigma_p = \cancel{1.82}\ 0.90$$



7. *(2 p.ti risp. esatta, -1 p.to risp. errata)* Quale delle seguenti affermazioni sui tassi a pronti e a termine deve essere sempre verificata per evitare arbitraggi?

(a) I tassi a pronti sono sempre crescenti rispetto al tempo

(b) I tassi a termine sono sempre crescenti rispetto al tempo

(c) I tassi a pronti sono sempre maggiori dei tassi a breve (tassi a termine a un anno)

(d) I tassi a pronti sono sempre minori dei tassi a breve (tassi a termine a un anno)

(e) Nessuna delle precedenti

Tutti questi casi sono possibili senza implicare l'esistenza di arbitraggi.

8. *(6 p.ti)*

Considerare la legge di capitalizzazione degli interessi composti annualmente rispetto a un tasso annuo i

$$W_t = W_0(1+i)^t$$

Ricavare le formule per calcolare in funzione di i il valore attuale V_0 e la duration D di una rendita infinita anticipata a rata SEMESTRALE costante pari a I.

Sia i_s il tasso semestrale equivalente: $i_s = (1+i)^{1/2} - 1$

Il valore attuale della rendita si ottiene risolvendo

$$V_0 = I + V_0 d_s \qquad \text{dove} \qquad d_s = (1+i_s)^{-1}$$

quindi:

$$V_0 = \frac{I}{1-d_s} = I\left(1+\frac{1}{r_s}\right)$$

Per calcolare la duration D utilizziamo la relazione

$$\frac{V_0'}{V_0} = -\frac{D}{1+r_s}$$

Dato che $V_0' = -\frac{I}{r_s^2}$

sostituendo otteniamo:

$$\frac{-I/r_s^2}{I(1+1/r_s)} = -\frac{D}{1+r_s}$$

cioè:

$$D = \frac{1}{r_s}$$

da notare che tale duration è espressa in semestri. Per tornare su base annua occorre dividere il valore ottenuto per due.