MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE
Esame 26 Giugno 2013

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma ....

SOLUZIONI

1	2	3	4	5	6	7	8	TOT

TUTTE LE RISPOSTE SONO APPROSSIMATE ALLA SECONDA CIFRA DOPO LA VIRGOLA!
E' vietato l'uso di libri e quaderni. Tempo a disposizione 2 ore e 30 minuti.

1. *(2+2=4 p.ti)* Sul mercato sono trattate due obbligazioni. La prima ha prezzo P_1 e rimborsa un capitale x al tempo T_1. La seconda ha prezzo P_2 e rimborsa un capitale y al tempo $T_2 > T_1$.

   Si determini Q, il prezzo a termine in T_1 di un'obbligazione che paga $\frac{y}{x}$ in T_2.
   Dati: $P_1 = 40, P_3 = 100$

   $[P_1 = 70,\ P_2 = 105] \to Q = 1.5$ (a)
   $[P_1 = 65,\ P_2 = 130] \to Q = 2$ (b)
   $[P_1 = 40,\ P_2 = 100] \to Q = 2.5$ (c)
   $[P_1 = 40,\ P_2 = 120] \to Q = 3$ (d)

   Determinare il prezzo a termine Q

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $Q = 1.5$
   (b) $Q = 2$
   (c) $Q = 2.5$
   (d) $Q = 3$
   (e) Nessuno dei precedenti.

   Svolgimento: *(2 p.ti)*:

   $$P_1 = d(0,T_1)\,x \qquad P_2 = d(0,T_2)\,y$$

   $$Q = d(0,T_1,T_2)\,\frac{\cancel{y}}{\cancel{x}} = \frac{d(0,T_2)}{d(0,T_1)}\,\frac{\cancel{y}}{\cancel{x}} = \frac{P_2}{P_1}$$

2. *(2+2=4 p.ti)* Si vuole costituire un capitale X in N versamenti trimestrali d'importo costante a partire dal mese prossimo su un conto corrente che remunera $i\%$ all' anno (con capitalizzazione degli interessi annuale). Determinare l'importo R di ogni singolo versamento.
   Dati: $X = 1800, N = 16, i = 5\%$

   $[X = 1000, N = 8, i = 5\%] \to 118.7595$ (b)
   $[X = 1500, N = 8, i = 10\%] \to 169.5262$ (d)
   $[X = 1800, N = 16, i = 5\%] \to 101.6728$ (a)
   $[X = 2500, N = 16, i = 10\%] \to 127.85$ (e)

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $100 \le R < 110$
   (b) $110 \le R < 125$
   (c) $125 \le R < 140$
   (d) $165 \le R < 180$
   (e) Nessuno dei precedenti.

   $$r_4 = (1+i)^{1/4} - 1 \quad \text{(tasso trimestrale)}$$

   $$d_4 = (1+r_4)^{-1}$$

   Svolgimento: *(2 p.ti)*:

   $$(1+i)^{2/12} R\,\frac{1-d_4^N}{r_4} = X\,(1+i)^{-N\cdot\frac{1}{4}}$$

   $$R = X\,(1+i)^{-\frac{N}{4}-\frac{2}{12}}\,\frac{r_4}{1-d_4^N}$$

3. *(2+2=4 p.ti)* Un progetto d'investimento ha un VAN di V euro. Un progetto alternativo ha un costo iniziale di X euro, durata 3 anni ed assicura il flusso $(R, 2R, 3R)|(1,2,3)$, con $R > 0$. Sia $i = 10\%$ il tasso di valutazione annuo, determinare il valore di R che rende i due progetti equivalenti secondo il criterio del VAN.

Dati: $[X = 150, V = 1300]$

Selezionare la rispostlea esatta: *(2 p.ti)*

(a) $300 \leq R < 310$

(b) $310 \leq R < 320$

(c) $320 \leq R < 330$

(d) $330 \leq R < 340$

(e) Nessuno dei precedenti.

$[X=50,\ V=1500] \to R = 321.84$ (c)

$[X=100,\ V=1400] \to R = 311.47$ (b)

$[X=150,\ V=1300] \to R = 301.08$ (a)

$[X=200,\ V=1200] \to R = 290.70$ (e)

Svoglimento: *(2 p.ti)*

$$d = (1+i)^{-1}$$

$$V = -X + Rd + 2Rd^2 + 3Rd^3$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{V+X}{d + 2d^2 + 3d^3}$$

4. *(2+2=4 p.ti)* In un mercato con due titoli A e B i cui rendimenti medi e deviazioni standard sono dati rispettivamente da $(\bar r_A, \sigma_A)$ e $(\bar r_B, \sigma_B)$ e con correlazione $\rho = -1$, determinare il rendimento atteso $\bar R$ del portafoglio di varianza minima. Dati: $[\bar r_A = 2\bar r_B = 1, \sigma_A = 1, \sigma_B = 2]$

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $\bar R = 1$

(b) $\bar R = 1.33$

(c) $\bar R = 1.50$

(d) $\bar R = 1.66$

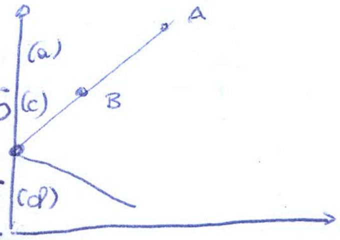
(e) Nessuno dei precedenti

$[\bar r_A = 1,\ \bar r_B = 1,\ \sigma_A = 1,\ \sigma_B = 2] \to \bar R = 1$ (a)

$\bar r_A = 1,\ \bar r_B = 2,\ \sigma_A = 1,\ \sigma_B = 1 \to \bar R = 1.5$ (c)

$[\bar r_A = 2,\ \bar r_B = 1,\ \sigma_A = 1,\ \sigma_B = 2] \to \bar R = 1.6$ (d)

$[\bar r_A = 2,\ \bar r_B = 1,\ \sigma_A = 2,\ \sigma_B = 1] \to \bar R = 1.3$ (b)



Svoglimento: *(2 p.ti)*

Se $\rho = -1$ la varianza di un portafoglio $(\alpha, 1-\alpha)$ è

$$\sigma^2 = \alpha^2\sigma_A^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_A\sigma_B + (1-\alpha)^2\sigma_B^2$$

$$= [\alpha\sigma_A - (1-\alpha)\sigma_B]^2$$

quindi il portaf. a varianza minima si ottiene da

$$\alpha\sigma_A - (1-\alpha)\sigma_B = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

Il rendimento atteso è:

$$\alpha \bar r_A + (1-\alpha)\bar r_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B}\bar r_A + \frac{\sigma_A}{\sigma_A+\sigma_B}\bar r_B$$

5. *(2+2=4 p.ti)* In un mercato con n titoli i due portafogli A e B sono efficienti in media e varianza. I loro rendimenti attesi sono $\bar{r}_A, \bar{r}_B$ e le deviazioni standard sono σ_A, σ_B. La correlazione tra i rendimenti è ρ.

Calcolare il valore minimo della varianza σ^2 degli investimenti aventi rendimento atteso pari a $\bar{r}$

Dati:

$\bar{r}_A = 50\%, \bar{r}_B = 10\%, \sigma_A = 40\%, \sigma_B = 10\%, \rho = 0.8, \bar{r} = 20\%$

$\sigma_B = 20\% \to \sigma^2 = 0.06$ (b)
$\sigma_B = 30\% \to \sigma^2 = 0.10$ (c)
$\sigma_B = 10\% \to \sigma^2 = 0.0276$ (a)
$\sigma_B = 35\% \to \sigma^2 = 0.12$ (d)

(a) $0 \leq \sigma^2 < 0.03$
(b) $0.03 \leq \sigma^2 < 0.07$
(c) $0.07 \leq \sigma^2 < 0.11$
(d) $0.11 \leq \sigma^2 < 0.14$
(e) Nessuno dei precedenti

Per il T. dei due fondi, la frontiera eff. si ottiene tramite combinazioni lineari convesse dei due portafogli.

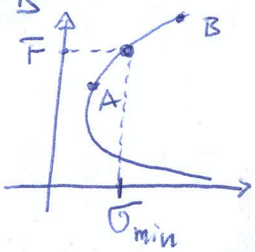
Svolgimento: *(2 p.ti)*

Quindi la varianza minima corrispondente al rendimento $\bar{r}$ si ottiene risolvendo

$$\alpha \bar{r}_A + (1-\alpha)\bar{r}_B = \bar{r} \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{r} - \bar{r}_B}{\bar{r}_A - \bar{r}_B}$$

e calcolando la corrispondente varianza

$$\sigma^2_{min} = \alpha\sigma_A^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_A\sigma_B + (1-\alpha)\sigma_B^2$$



6. *(4 p.ti)* Ho investito un capitale C per il 30% in uno zero coupon bond con Maturity T_1 e valore attuale V e per il restante 70% in un BTP con maturity T_2, duration D_2 e valore attuale V_2. Lo yield to maturity dell'investimento è y. Determinare la Duration D dell'investimento.

(Non tutte le informazioni sono necessarie per rispondere)

Dati: $C = 1000$, $T_1 = 10$ anni, $V = 98$, $T_2 = 7$, $D_2 = 5$, $V_2 = 105$, $y = 10\%$.

$$D = 0.3 \cdot T_1 + 0.7\, D_2 = 6.5$$

(tutte le versioni)

7. *(2 p.ti risp. esatta, -1 p.to risp. errata)* Se il portafoglio A è efficiente in media-varianza mentre il portafoglio B non lo è, allora possiamo affermare con certezza che:

   (a) Il rendimento atteso di A è maggiore del rendimento atteso di B

   (b) La varianza del rendimento di A è maggiore della varianza del rendimento di B

   (c) Il rendimento atteso di A è minore del rendimento atteso di B

   (d) La varianza del rendimento di A è minore della varianza del rendimento di B

   (e) Nessuno dei precedenti

8. *(6 p.ti)*

   Considerare la legge di capitalizzazione degli interessi composti annualmente rispetto a un tasso annuo r

   $$W_t = W_0(1+r)^t$$

   Si consideri una rendita di durata infinita che paga l'importo I tutti gli anni dispari a partire dal primo anno e l'importo $2I$ tutti gli anni pari a partire dal secondo anno. (Cioè il flusso di pagamenti della rendita è

   $$(I, 2I, I, 2I, I, 2I, \dots)|(1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

   Calcolare V_0, il Valore Attuale in $t = 0$ della rendita in funzione di I e di r.

Sia r_b il tasso biennale:

$$r_b = (1+r)^2 - 1$$

Il valore al tempo 0 del flusso di pagamenti degli anni <u>pari</u> è

$$V_0^p = \frac{2I}{r_b}$$

Il valore al tempo 0 del flusso dei pagamenti degli anni <u>dispari</u> è

$$V_0^d = \frac{I}{r_b}(1+r)$$

Il valore totale è:

$$V_0 = V_0^p + V_0^d = \frac{I}{r_b}(2+1+r) = I\,\frac{3+r}{(1+r)^2-1}$$

$$= I\,\frac{3+r}{r(2+r)}$$