MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE

Esame 16 Settembre 2013

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma .... SOLUZIONI

1	2	3	4	5	6	7	8	TOT

1. *(4 p.ti)* Si vuole rimborsare un debito iniziale D, ad un tasso annuo effettivo i con rate mensili, costanti, posticipate e non superiori a ~~1000~~ Euro

   Dati: $i = 8\%$, $D = 1500$, ~~$X = 90$~~ $X = 1000$

   Determinare il minimo numero di rate n necessario a rimborsare il debito

   Svoglimento::

   L'importo di una rata è $R = \dfrac{D}{a_{\overline{n}|r_m}} = \dfrac{D}{(1-d_m^n)/r_m}$

   dove r_m è il tasso mensile $r_m = (1+i)^{1/12} - 1$ $\quad d_m = 1/(1+r_m)$

   Imponendo $R \leq X$ si trova $n \geq \dfrac{\log(1 - r_m D/X)}{\log(d_m)}$

   (n deve essere un numero intero!) $n \geq 1.51$

   quindi la risposta è $n = 2$

2. *(2+2=4 p.ti)* Considerare un piano di ammortamento a quota capitale costante con debito iniziale D, numero di rate N e prima quota interesse I_1.

   Dati: $D = 1700, N = 12, I_1 = 100$

   Determinare l'importo della seconda rata R_2

   Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

   (a) $0 \leq R_2 < 230$
   (b) $230 \leq R_2 < 235$
   (c) $235 \leq R_2 < 245$
   (d) $245 \leq R_2 < 255$
   (e) Nessuno dei precedenti.

   $D = 1900 \rightarrow R_2 = 250$ (d)
   $D = 1700 \rightarrow R_2 = 233{,}33$ (b)
   $D = 1600 \rightarrow R_2 = 225$ (a)
   $D = 1800 \rightarrow R_2 = 241{,}66$ (c)

   Svoglimento: *(2 p.ti)*:

$R_2 = C + I_2$

dove $C = D/N$

$I_2 = i \cdot D_1$

con $i = \dfrac{I_1}{D}$ e $D_1 = D - C$

quindi: $I_2 = \dfrac{I_1}{D}(D - C)$

cioè:

$R_2 = \dfrac{D}{N} + I_1 - I_1 \cdot \dfrac{1}{N}$

3. *(2+2=4 p.ti)* Data la struttura dei fattori di sconto a pronti

$$d(0,1) = 0.98, d(0,2) = 0.97, d(0,3) = 0.96, d(0.4) = 0.955$$

Calcolare il prezzo a termine F, con pagamento tra T_1 anni di uno zero coupon bond che rimborsa un capitale C tra T_2 anni.

Dati: $C = 105, T_1 = 2, T_2 = 4$

$C = 100 \rightarrow F = 98.65$ (b)

$C = 105 \rightarrow F = 108.30$ (d)

$C = 95 \rightarrow F = 103.38$ (c)

$C = 100 \rightarrow F = 93.53$ (a)

Calcolare F

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $F < 95$

(b) $95 \leq F < 100$

(c) $100 \leq F < 105$

(d) $105 \leq F < 110$

(e) $110 \leq F$

Svolgimento: *(2 p.ti)*:

$$F = C \cdot \frac{d(0,T_2)}{d(0,T_1)}$$

4. *(2+2=4 p.ti)* Con gli stessi dati dell'esercizio precedente. Si vuole rimborsare un debito D in 4 anni, in modo equo rispetto alla struttura dei tassi del mercato assegnata nell'esercizio precedente, con tre rate di importi $R, 2R, 3R$ pagate in $t = 1, 2, 3$ e un importo pari a $D/2$ da pagarsi in $t = 4$. Determinare R.

Dati: $D = 900$

$D = 1000 \rightarrow R = 90.09$ (c)

$D = 1100 \rightarrow R = 99.09$ (e)

$D = 900 \rightarrow R = 81.08$ (a)

$D = 950 \rightarrow R = 85.58$ (b)

Determinare l'importo R

Selezionare la risposta esatta: *(2 p.ti)*

(a) $R < 83$

(b) $83 \leq R < 87$

(c) $87 \leq R < 92$

(d) $92 \leq R < 97$

(e) $97 \leq R$

Svolgimento: *(2 p.ti)*:

Risolviamo rispetto a R:

$$R\,d(0,1) + 2R\,d(0,2) + 3R\,d(0,3) + \frac{D}{2}d(0,4) = D$$

$$R = \frac{D - \frac{D}{2}d(0,4)}{d(0,1) + 2d(0,2) + 3d(0,3)}$$

5. *(2+2=4 p.ti)* Un mercato è composto da tre titoli rischiosi, con lo stesso rendimento atteso $\bar{r}$, e matrice di varianza-covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quale tra i tre titoli rischiosi risulta efficiente in media-varianza?

Un portafoglio $\underline{w}$ è efficiente se il vettore Σw è linearmente dipendente dai vettori $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ~~nel~~ questo caso; per il primo titolo, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi $\Sigma w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ che è dip. da $\begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{r} \\ \bar{r} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi è efficiente

per il secondo titolo: $\Sigma w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, che è indip., quindi non è efficiente, per il terzo: $\Sigma w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, indip., quindi non eff.

6. *(4 p.ti)* Con gli stessi dati dell'esercizio precedente, tracciare il grafico media-varianza dei rendimenti e rappresentare i seguenti punti:

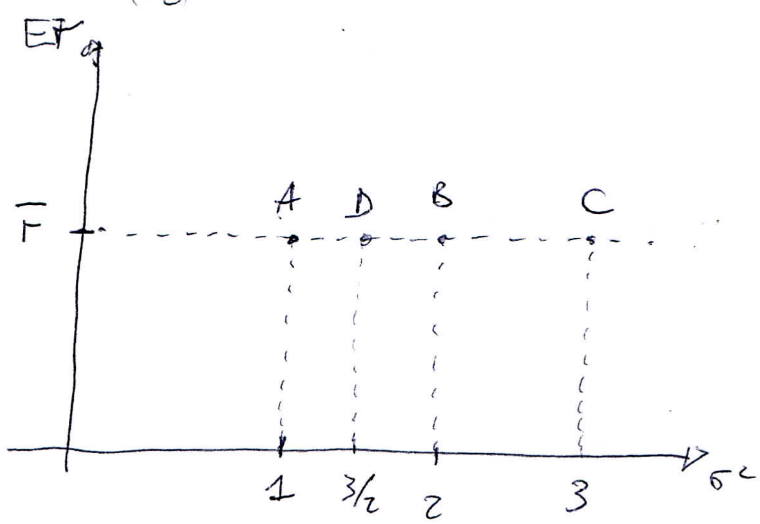
- A, che rappresenta il primo titolo rischioso
- B, che rappresenta il secondo titolo rischioso
- C, che rappresenta il terzo titolo rischioso
- D, che rappresenta il portafoglio $(1/2, 0, 1/2)$

Svolgimento:

Tutti i titoli hanno lo stesso rendimento atteso $\bar{r}$, quindi anche tutti i portafogli hanno rendimento $\bar{r}$.

La varianza del portaf. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ è data da

$$\sigma_D^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$



7. Rispondere alla seguente domanda *2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata*

Se il tasso di parità è maggiore del tasso di rendimento (o yield to maturity) di un'obbligazione, allora

(a) Il valore attuale dell'obbligazione deve essere minore del suo valore facciale (detto anche valore nominale).

OR → (b) Il valore attuale dell'obbligazione deve essere maggiore del suo valore facciale.

(c) E' possibile realizzare un arbitraggio vendendo allo scoperto l'obbligazione.

(d) E' possibile realizzare un arbitraggio acquistando l'obbligazione.

(e) Nessuna delle precedenti

8. *(6 p.ti)* Sia $r = 10\%$ il tasso di interesse annuo della legge di capitalizzazione continua $V_t = e^{rt}$ calcolare il valore attuale, rispetto a tale legge, di una rendita perpetua che paga 10 euro al mese ogni mese a partire dal prossimo.

$$V_0 = 10 \cdot d_m + V_0 \cdot d_m$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{10\, d_m}{1 - d_m}$$

dove $d_m = e^{-r \cdot 1/12}$

sostituendo $r = 0.1$ si ottiene

$$V_0 = 1195$$