

MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE - (n-z)

14 Giugno 2010

Cognome Nome Matricola

Firma

1) (6 p.ti) Quanti pagamenti sono necessari per rimborsare D euro con rate costanti semestrali di importo non superiore a K euro se il tasso di interesse annuo è 12% e la capitalizzazione degli interessi è semestrale? Riportare la prima riga del piano di ammortamento corrispondente. [$D = 1000$, $K = 150$]

Il numero di pagamenti deve essere maggiore
o uguale di $X = \log(1 - \tau \frac{D}{K}) / \log(d)$
dove $\tau = \frac{12\%}{2} = 6\%$ e $d = (1 + \tau)^{-1}$

Il numero di pagamenti necessari è pari al
più piccolo intero maggiore di X .

Una volta trovato N , la prima riga del
piano di ammortamento si trova con

$$R = \frac{D}{a_{\overline{N}| \tau}}, \quad I_1 = D \cdot \tau, \quad C_1 = R - I_1,$$

$$D_1 = D - C_1.$$

2) (6 p.ti) Data la struttura dei fattori di sconto a pronti $d(0,1), d(0,2), d(0,3), d(0,4)$ (dove il tempo è espresso in anni), calcolare

1. Il prezzo a pronti e a termine con scadenza in $t = 1$ del flusso

$$x_t = \{10, 10, 110\} | \{2, 3, 4\}$$

2. L'importo R per cui il flusso

$$x_t = \{-100, R, R\} | \{1, 2, 3\}$$

è equo (cioè ha valore nullo) in $t = 0$.

3. Il TAN che deve avere un titolo che paga cedole annuali e durata 3 anni per quotare sopra la pari.

$$[d(0,1) = 0.98, d(0,2) = 0.97, d(0,3) = 0.96, d(0,4) = 0.955]$$

1. Prezzo a pronti:

$$V_0 = 10 d(0,2) + 10 d(0,3) + 110 d(0,4)$$

Prezzo a termine:

$$F = \frac{V_0}{d(0,1)}$$

2. Risolvere rispetto a R :

$$-100 d(0,1) + R d(0,2) + R d(0,3) = 0 \Rightarrow R = \frac{100 d(0,1)}{d(0,2) + d(0,3)}$$

3. Calcoliamo il tasso di parità:

$$I d(0,1) + I d(0,2) + (C + I) d(0,3) = C$$

$$I = C \frac{1 - d(0,3)}{\sum_{k=1}^3 d(0,k)} \Rightarrow \frac{I}{C} = \frac{1 - d(0,3)}{\sum_{k=1}^3 d(0,k)}$$

se il TAN è maggiore di $\frac{I}{C}$ il titolo quota sopra le parità.

3) (6 p.ti) Consideriamo un mercato in cui opera una banca ideale con tasso annuo r . Determinare il valore attuale di un titolo che rimborsa un importo costante I al termine di ogni anno da oggi in poi, per sempre. Tale titolo è più o meno rischioso (dal punto di vista della sensibilità alle variazioni di tasso di interesse) di uno zero coupon bond che rimborsa il capitale dopo 20 anni? Motivare la risposta.

$$[I = 10, r = 10\%]$$

Bisogna calcolare il valore attuale di una rendita perpetua:

$$V_0 = I \cdot \sum_{k=1}^{\infty} d^k = I \cdot \frac{1}{1-d} = \frac{I}{r}$$

La Duration di una rendita perpetua è $D = 1 + \frac{1}{r}$ (perché?)

e quindi sarà più rischioso se

$$1 + \frac{1}{r} > 20$$

altrimenti sarà meno rischioso.

4) (6 p.ti) I titoli A e B sono efficienti in media e varianza. Il rendimento del titolo A ha media m_A e deviazione standard σ_A , mentre quello del titolo B ha media m_B e deviazione standard σ_B . La correlazione tra i due rendimenti è pari a ρ . Dire se in un tale mercato è possibile, e in tal caso dire come, investire nei seguenti portafogli

1. un portafoglio con lo stesso rendimento atteso di B ma con la metà della sua varianza

2. un portafoglio con la stessa varianza di A ma con il doppio del suo rendimento atteso

Qual è la varianza minima di un portafoglio che ha il doppio del rendimento atteso di B ?

$$[m_A = 5\%, \sigma_A = 20\%, m_B = 30\%, \sigma_B = 40\%, \rho = 0.3]$$

1. Non è possibile perché B è efficiente

2. " " " " A " " "

Per il 2. dei due fondi tutti i portf. efficienti si ottengono combinando A e B . Il portf. eff. che ha rendimento atteso $2m_B$ si trova risolvendo

$$\alpha m_A + (1-\alpha) m_B = 2m_B \Rightarrow \alpha = \frac{m_B}{m_A - m_B}$$

La var. di tale portaf.

$$\sigma^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_A\sigma_B + (1-\alpha)^2 \sigma_B^2$$

è la varianza minima.

5) Rispondere alle seguenti domande (2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata):

1. Un gestore di un portafoglio obbligazionario prevede un futuro abbassamento del livello dei tassi di interesse. Quale delle seguenti azioni è la conseguenza più plausibile:

- (a) vendere immediatamente tutto e investire in titoli azionari
- ☒ (b) alzare la duration del portafoglio ✓
- (c) abbassare la duration del portafoglio

2. Quale delle seguenti azioni comporta più verosimilmente un aumento della duration di un portafoglio obbligazionario?

- (a) vendere BOT e acquistare CCT
- (b) vendere BOT e acquistare BTP
- ☒ (c) vendere CCT e acquistare BTP ✓

3. Secondo il criterio del VAN, tra due investimenti si sceglie

- ☒ (a) sempre quello con il VAN maggiore ✓
- (b) quello con il VAN maggiore, se anche il TIR è maggiore
- (c) quello con il VAN maggiore, ma solo se il TIR non è minore