MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE - (n-z)

5 Luglio 2010

Cognome Nome ....Matricola ....

Firma ....SOLUZIONI

1) *(6 p.ti)* Per rimborsare un debito di 1000 euro viene proposto un piano di ammortamento le cui prime due righe sono

k	D	R	C	I
0	1000	0	0	0
1	900	~~100~~ 130	100	30

Calcolare la riga successiva del piano di ammortamento nel caso

1. di rimborso a rate costanti
2. di rimborso a quota capitale costante

- Calcolo il tasso di interesse

$$i = \frac{I_1}{D}$$

1. Rate costante:

$$R_2 = R_1 \; ; \; I_2 = D_1 \cdot i \; ; \; C_2 = R_2 - I_2 \; ; \; D_2 = D_1 - C_2$$

2. Quota capitale costante

$$C_2 = C_1 \; ; \; I_2 = D_1 \cdot i \; ; \; R_2 = C_2 + I_2 \; ; \; D_2 = D_1 - C_2$$

MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE - (n-z)

5 Luglio 2010

Cognome Nome ....Matricola ....

Firma ....SOLUZIONI

1) *(6 p.ti)* Per rimborsare un debito di 1000 euro viene proposto un piano di ammortamento le cui prime due righe sono

k	D	R	C	I
0	1000	0	0	0
1	900	130	100	30

Calcolare la riga successiva del piano di ammortamento nel caso

1. di rimborso a rate costanti
2. di rimborso a quota capitale costante

- Calcolo il tasso di interesse

$$i = \frac{I_1}{D}$$

1. Rate costante:

$R_2 = R_1$; $I_2 = D_1 \cdot i$; $C_2 = R_2 - I_2$; $D_2 = D_1 - C_2$

2- Quota capitale costante

$C_2 = C_1$; $I_2 = D_1 \cdot i$; $R_2 = C_2 + I_2$; $D_2 = D_1 - C_2$

2) *(6 p.ti)* Il flusso $x = (200, 500)|(2, 5)$ ha valore attuale V_x e lo zero coupon bond che scade tra 5 anni ha valore attuale V_y. Calcolare i fattori di sconto a 2 e a 5 anni.
Secondo l'ipotesi della dinamica basata sulle aspettative di mercato, quale sarà il prezzo tra due anni del titolo che rimborsa 1000 euro tra 5 anni?
$[V_x = 650, V_y = 91]$

I fattori di sconto $d(0,2)$, $d(0,5)$ si trovano risolvendo

$$200\, d(0,2) + 500\, d(0,5) = V_x$$
$$100\, d(0,5) = V_y$$

- Secondo la dinamica basata sulle aspettative il valore atteso futuro coincide con l'attuale prezzo a termine, quindi

$$100\, d(0,2,5) = 100\, \frac{d(0,5)}{d(0,2)}$$

3) *(6 p.ti)* I prezzi a pronti degli zero coupon bond unitari che scadono rispettivamente tra 5 e tra 10 anni sono P_1 e P_2. Il prezzo a termine, con consegna tra 5 anni, dello zero coupon bond che scade tra 10 anni è P_3. Mostrare come effettuare un arbitraggio in modo da ricavare con certezza 1500 Euro all'istante iniziale senza nessun esborso successivo, indicando quante quote degli zcb vanno acquistate/vendute a pronti/termine nei diversi istanti di tempo.
$[P_1 = 0.95, P_2 = 0.93, P_3 = 0.97]$

Sia $x = d(0,5,10)\,d(0,5) - d(0,10) = P_3 \cdot P_1 - P_2$

Dato che $x > 0$ si può realizzare un arbitraggio.

Sia $C = 1500/x$. La strategia per ottenere 1500 €:

	0	5	10
1. Acquisto a pronti C zcb che scadono in 10	$-C \cdot P_2$	0	C
2. Vendo a pronti $C \cdot P_3$ zcb che scadono in 5	$+C P_3 P_1$	$-CP_3$	0
3. Vendo a termine C zcb che scadono in 10	0	$+CP_3$	$-C$
	$C(P_3 P_1 - P_2) = 1500$	0	0

4) *(6 p.ti)* Un mercato è composto da tre titoli i cui tassi di rendimento r_1, r_2, r_3 sono indipendenti, con valori attesi $Er_1 = 10\%$, $Er_2 = 10\%$, $Er_3 = 20\%$ e deviazioni standard $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 20\%$, $\sigma_3 = 30\%$. Dire se qualcuno tra i tre titoli è efficiente in media e varianza.

Le condizioni ottenute dalla lagrangiana sono:

$$V\underline{w} + \lambda E\vec{r} + \mu \vec{1} = \vec{0}$$

dove $V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$, $E\vec{r} = \begin{pmatrix} Er_1 \\ Er_2 \\ Er_3 \end{pmatrix}$ $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Nel caso del titolo 1: $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10\% \\ 10\% \\ 20\% \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Non è risolubile quindi non è efficiente

- Idem per il titolo 2
- Il titolo 3: $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10\% \\ 10\% \\ 20\% \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

è risolubile, quindi è efficiente.

5) Rispondere alle seguenti domande (2 p.ti risposta esatta, -1 p.to risposta errata):

1. Sia $C > 0$. Quale tra i seguenti flussi di cassa ha TIR pari a zero?

   (a)
   $$\{-C, C, -(C + C/10), C + C/5\}|\{0, 1, 2, 3\}$$

   (b)
   $$\{-C, C/2, C/3, C/4\}|\{0, 1, 2, 3\}$$

   (c)
   $$\{-C/4, C/2, -C/4, C/2\}|\{0, 1, 2, 3\}$$

   (d) Nessuno dei precedenti

2. Il TAN di un'obbligazione è minore del suo yield to maturity, quindi...

   (a) ... l'obbligazione quota sopra la pari
   (b) ... l'obbligazione quota sotto la pari
   (c) ... il valore dell'obbligazione dipende dalla duration

3. Per un titolo a tasso variabile...

   (a) il flusso di pagamenti è aleatorio come il valore attuale
   (b) il flusso di pagamenti è aleatorio ma il valore attuale è deterministico
   (c) il flusso di pagamenti è deterministico ma il valore attuale è aleatorio
   (d) nessuno dei precedenti