MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE - CLEM
Docenti A. Fabretti (canale I) I. Valdivia (canale II)
A.A. 2014/2015 - Compito Test

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Firma ....

1) *(5 p.ti)* Il signor Biondo ha acceso un mutuo di 100000 euro con la banca A al tasso i_A da rimborsare in rate mensili posticipate a quota capitale costante per 20 anni. Alla fine del terzo anno decide di estinguere il mutuo con la banca A accendendone uno con la banca B al tasso i_B con rata mensile costante e durata 10 anni. Supponendo nessuna penale o spesa di istruttoria, calcolare la nuova rata.
Dati: $i_A = 5\%$, $i_B = 4\%$ (i tassi sono nominali)

Risposta: $R =$ 860.5837 €

Svolgimento:

1ª fase con la Banca A comporta un ammortamento italiano, vale a dire un ammortamento a Quota Capitale costante. Le rate sono mensili e il rimborso dura 20 anni ⇒ il n° di rate è $n = 12 \times 20 = 240$ e la Quota Capitale costante è

$$QC_K = \frac{100'000}{240} = 416.6667 \text{ €}$$

Alla fine del 3° anno si vuole estinguere il debito tramite un ammortamento francese (⇒ a rate costante) di durata 10 anni e rate mensile al tasso $i_B = 4\%$. Per poter compilare tale ammortamento va calcolato il debito residuo alla fine del 3° anno ricavato con l'ammortamento italiano ⇒:

$$D_K = D_0 - K \times QC \quad (\text{se } QC_K = QC = \text{cost.}) \Rightarrow$$

$$D_{36} = 100'000 - 36 \times QC = 100'000 - 36 \times 416.6667 =$$
$$= 85'000$$

2° fase con la Banca B: è richiesta la rata di tale ammortamento ⇒ sfruttiamo le formule delle rendite posticipate: $i_B^{12} = \frac{i_B}{12} = 0.00333 = 0.33\%$

il 2° ammortamento dura 10 anni ⇒ il n° delle rate mensili è $n = 12 \times 10 = 120$

$$\Longrightarrow R = \frac{D_{36}}{a_{\overline{120}|}i_B^{12}} = \frac{85'000}{\frac{1-(1+0.0033)^{-120}}{0.0033}} =$$

$$= \frac{85'000 \times 0.0033}{1-(1+0.0033)^{-120}} = 860.5837 €$$

2) *(5 p.ti)* Data la seguente struttura di tassi

$$i(0,0.5) = 2.55\% \quad i(0,1) = 2.82\% \quad i(0,1.5) = 3.4\% \quad i(0,2) = 3.90\%$$

determinare prezzo e duration di un BTP con durata due anni, cedola semestrale, TAN=7% e valore nominale 1000.

Risposta: $P = 1060.65$ $D = 1.90335$

Svolgimento: Il flusso di importi del BTP è:

$$\begin{array}{ccccc} & 35 & 35 & 35 & 1035 \\ \hline & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 \end{array} \Longrightarrow$$

$$P = \frac{35}{[1+i(0,0.5)]^{0.5}} + \frac{35}{1+i(0,1)} + \frac{35}{[1+i(0,1.5)]^{1.5}} + \frac{1035}{[1+i(0,2)]^{2}} = 1060.65€$$

$$D = \left(0.5 \times 35 \times [1+i(0,0.5)]^{-0.5} + 1 \times 35 [1+i(0,1)]^{-1} + 1.5 \times 35 \times [1+i(0,1.5)]^{-1.5} + 2 \times 1035 \times [1+i(0,2)]^{-2}\right) / P = 1.903335 \text{ anni}$$

3) *(6 p.ti)* Sia data un'obbligazione **x** con valore nominale 100 euro, scadenza 2 anni, cedole semestrali e tasso nominale annuo 12%, e uno zero coupon bond **y** a 1 anno con valore nominale 100. Usando questi titoli e facendo riferimento alla struttura dei tassi dell'esercizio precedente, costruire un portafoglio per immunizzare un'uscita di 1500 euro tra 1 anno e mezzo.
Calcolare il nuovo valore di portafoglio.

Risposta: $q_1 = 6$ $q_2 = 7$ $V = 1393.18$

Svolgimento: I titoli in questione hanno i seguenti flussi

$$x \quad \begin{array}{ccccc} & 6 & 6 & 6 & 106 \\ \hline & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 \end{array}$$

$$y \quad \begin{array}{cc} & 100 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} P_x = \dfrac{6}{[1+i(0,0.5)]^{0.5}} + \dfrac{6}{1+i(0,1)} + \dfrac{6}{[1+i(0,1.5)]^{1.5}} + \dfrac{106}{[1+i(0,2)]^{2}} = 115.66€ \\ D_x = \left(0.5 \times 6 \times [1+i(0,0.5)]^{-0.5} + 1 \times 6 \times [1+i(0,1)]^{-1} + 1.5 \times 6 \times [1+i(0,1.5)]^{-1.5} + 2 \times 106 \times [1+i(0,2)]^{-2}\right) / P_x = 1.84 \text{ anni} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_y = 100 \times [1+i(0,1)]^{-1} = 97.26 € \\ D_y = 1 \text{ anno} \end{cases}$$

$$\begin{cases} VA = V_{debito} = 1500 \times [1+i(0,1.5)]^{-1.5} = 1426.627 \\ D = D_{debito} = 1.5 \text{ anni} \end{cases}$$

Se $V = q P_y$ $\quad V = q P_x \Longrightarrow$

$$\begin{cases} V_y + V_x = VA \\ \frac{V_y}{VA} D_y + \frac{V_x}{VA} D_x = D \end{cases} \iff \begin{cases} V_y = VA - V_x \\ \frac{VA - V_x}{VA} D_y + \frac{V_x}{VA} D_x = D \end{cases}$$

$$(VA - V_x) D_y + V_x D_x = D \cdot VA$$

$$V_x (D_x - D_y) = VA (D - D_y) \Rightarrow V_x = \frac{VA(D - D_y)}{D_x - D_y} =$$

$$= \frac{1426.627 \times (1.5 - 1)}{1.84 - 1} = 849.1828 €$$

$$V_y = VA - V_x = 1426.627 - 849.1828 = 577.4443 €$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow q_y = \frac{V_y}{P_y} = 5.9371 \simeq 6 \\ q_x = \frac{V_x}{P_x} = 7.342061 \sim 7 \end{array}\right\} \rightarrow VA = 6 \times P_y + 7 \times P_x = 1393.18 €$$

4) *(6 p.ti)* Un mercato è composto dai titoli A, B. I rendimenti attesi dei titoli sono $\overline{r}_A = 10\%$ e $\overline{r}_B = 12\%$, le deviazioni standard dei rendimenti dei titoli sono $\sigma_A = 30\%$, $\sigma_B = 40\%$. Disegnate la frontiera efficiente (sentiero deviazione standard-rendimento atteso) nel caso in cui $\rho_{A,B} = -1$.
Nel caso in cui la correlazione tra i rendimenti sono $\rho_{1,2} = 0.4$, calcolare il portafoglio a varianza minima, fornendo la sua composizione, il suo rendimento atteso e la sua varianza.
Determinare la varianza del portafoglio che ha rendimento pari a 15%.

Risposta:

Svolgimento: Il diagramma di portafoglio sul piano $(\sigma, \overline{r})$ si disegna esprimendo $\overline{r}$ come funzione di σ utilizzando il seguente sistema varianza-rendimento di un portafoglio a 2 titoli

$$\begin{cases} \sigma^2 = \alpha^2\sigma_B^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{AB} + (1-\alpha)^2\sigma_A^2 \\ \overline{r} = \alpha\overline{r}_B + (1-\alpha)\overline{r}_A \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{\overline{r}-\overline{r}_A}{\overline{r}_B-\overline{r}_A}$$ lo sostituisco nell'eq. per σ^2

e otteniamo

$$\sigma^2 = \left(\frac{\overline{r}-\overline{r}_A}{\overline{r}_B-\overline{r}_A}\right)^2\sigma_B^2 + 2\left(\frac{\overline{r}-\overline{r}_A}{\overline{r}_B-\overline{r}_A}\right)\left(1-\frac{\overline{r}-\overline{r}_A}{\overline{r}_B-\overline{r}_A}\right)\sigma_{AB} + \left(1-\frac{\overline{r}-\overline{r}_A}{\overline{r}_B-\overline{r}_A}\right)^2\sigma_A^2$$

$$(\overline{r}_B-\overline{r}_A)^2\sigma^2 = (\overline{r}^2 - 2\overline{r}\,\overline{r}_A + \overline{r}_A^2)\sigma_B^2 + 2(\overline{r}-\overline{r}_A)(\overline{r}_B-\overline{r})\sigma_{AB}$$
$$+ (\overline{r}_B^2 - 2\overline{r}\,\overline{r}_B + \overline{r}^2)\sigma_A^2 =$$
$$= (\sigma_B^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_A^2)\overline{r}^2 - 2(\overline{r}_A\sigma_B^2 - \overline{r}_B\sigma_{AB} - \overline{r}_A\sigma_{AB} + \overline{r}_B\sigma_A^2)\overline{r}$$
$$+ (\overline{r}_A^2\sigma_B^2 - 2\overline{r}_A\overline{r}_B\sigma_{AB} + \overline{r}_B^2\sigma_A^2)$$

se $\rho_{AB} = -1 \Rightarrow \sigma_{AB} = -\sigma_A\sigma_B \Longrightarrow$

$$(\overline{r}_B-\overline{r}_A)^2\sigma^2 = (\sigma_A+\sigma_B)^2\overline{r}^2 - 2(\sigma_A+\sigma_B)\overline{r}(\overline{r}_A\sigma_B + \overline{r}_B\sigma_A) +$$
$$+ (\overline{r}_A\sigma_B + \overline{r}_B\sigma_A)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{[(\sigma_A+\sigma_B)\overline{r} - (\overline{r}_A\sigma_B + \overline{r}_B\sigma_A)]^2}{(\overline{r}_B-\overline{r}_A)^2} \Longrightarrow$$

$$\sigma = \frac{|(\sigma_A+\sigma_B)\overline{r} - (\overline{r}_A\sigma_B + \overline{r}_B\sigma_A)|}{\overline{r}_B-\overline{r}_A}$$ a seconda del segno di $(\sigma_A+\sigma_B)\overline{r} - (\overline{r}_A\sigma_B + \overline{r}_B\sigma_A)$

il valore assoluto sarà esplicitato con il segno + o con il segno $- \Longrightarrow$

⊙ se $(\sigma_A+\sigma_B)\bar{r}-(\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A)>0 \Leftrightarrow$ se

$$\bar{r} > \frac{\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A}{\sigma_A+\sigma_B} \Rightarrow$$

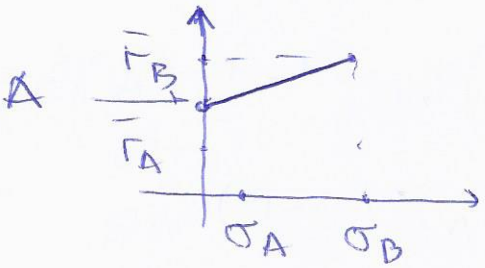
$$\sigma = \frac{(\sigma_A+\sigma_B)\bar{r}-(\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A)}{\bar{r}_B-\bar{r}_A}$$ esplicito $\bar{r}$ in funzione di σ

$$(\sigma_A+\sigma_B)\bar{r} = (\bar{r}_B-\bar{r}_A)\sigma + (\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A)$$

$$\bar{r} = \underbrace{\frac{\bar{r}_B-\bar{r}_A}{\sigma_A+\sigma_B}}_{0.02857}\sigma + \frac{\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A}{\sigma_A+\sigma_B} = A = 0.108571$$

$$= 0.028570\sigma + 0.108571$$

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_B-\bar{r}_A}{\sigma_A+\sigma_B}\sigma + A$$ è una retta che passa per i punti $(0, A)$ e $(\sigma_B, \bar{r}_B)$



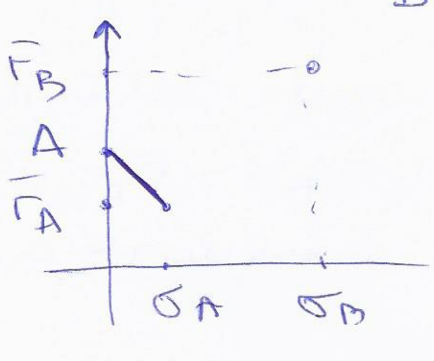
dal mom. che non considero vendite allo scoperto il tratto richiesto è il seguente disegnato

⊙ se $\bar{r} < \frac{\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A}{\sigma_A+\sigma_B} \Rightarrow$

$$\sigma = -\frac{(\sigma_A+\sigma_B)\bar{r}-(\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A)}{\bar{r}_B-\bar{r}_A} \Rightarrow$$

$$-(\sigma_A+\sigma_B)\bar{r} = (\bar{r}_B-\bar{r}_A)\sigma - (\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A)$$

$$\bar{r} = -\frac{\bar{r}_B-\bar{r}_A}{\sigma_A+\sigma_B}\cdot\sigma + \frac{\bar{r}_A\sigma_B+\bar{r}_B\sigma_A}{\sigma_A+\sigma_B} = -0.028570\sigma + 0.108571$$



il tratto richiesto è quello tracciato sul grafico

⊙ se $\rho_{AB}=0.4 \Rightarrow \sigma_{AB}=0.4\sigma_A\sigma_B \Rightarrow$

$$\sigma^2=\alpha^2\sigma^2_B+2\alpha(1-\alpha)0.4\sigma_A\sigma_B+(1-\alpha)^2\sigma^2_A$$

$$\frac{d\sigma^2}{d\alpha}=2\alpha\sigma^2_B+2(1-2\alpha)0.4\sigma_A\sigma_B-2(1-\alpha)\sigma^2_A=0 \Rightarrow$$

$$\alpha(\sigma^2_B-2\times0.4\sigma_A\sigma_B+\sigma^2_A)=\sigma^2_A-0.4\sigma_A\sigma_B$$

$$\alpha=\frac{\sigma^2_A-0.4\sigma_A\sigma_B}{\sigma^2_B-2\times0.4\sigma_A\sigma_B+\sigma^2_A}=0.27$$

$1-\alpha=0.73 \Rightarrow$

$\bar{r}=\alpha\bar{r}_B+(1-\alpha)\bar{r}_A=0.27\times0.12+0.73\times0.1=10.54\%$

$\sigma^2=\alpha^2\sigma^2_B+2\alpha(1-\alpha)0.4\sigma_A\sigma_B+(1-\alpha)^2\sigma^2_A=7.85\%$

⊙ se $\rho_{AB}=0.4$ e $\bar{r}=15\%=0.15 \Rightarrow$

$$\bar{r}=\alpha\bar{r}_B+(1-\alpha)\bar{r}_A \Rightarrow \alpha=\frac{\bar{r}-\bar{r}_A}{\bar{r}_B-\bar{r}_A}=\frac{0.15-0.1}{0.12-0.1}=0.317$$

$1-\alpha=1-0.317=0.683 \Rightarrow$

$$\sigma^2=\alpha^2\sigma^2_B+2\alpha(1-\alpha)0.4\sigma_A\sigma_B+(1-\alpha)^2\sigma^2_A=$$

$$=(0.317)^2\times(0.4)^2+2\times0.317\times0.683\times0.4\times0.3\times0.4$$
$$+(0.683)^2(0.3)^2=0.07885=7.885\%$$

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.

6) *(2 p.ti)* Data la struttura di tassi all'esercizio 2 se uno ZCB emesso tra 6 mesi con durata un anno ha prezzo 98.31 è

Dovrebbe essere

$$d(0,0.5,1.5) = \frac{d(0,1.5)}{d(0,0.5)} = \frac{[1+i(0,1.5)]^{-1.5}}{[1+i(0,0.5)]^{-0.5}}$$

$= 0.96313$

$\rightarrow$ il titolo è sopravvalutato

1. ~~sopravalutato~~ X
2. sottovalutato
3. equamente valutato
4. nessuna delle precedenti

7) *(2 p.ti)* La duration di uno ZCB a 3 anni che viene valutato dopo un anno e mezzo dall'emissione è

La duration di uno ZCB è la vita a scadenza del titolo dall'istante della valutazione $\Rightarrow$ nel caso in questione è

$3 - 1.5 = 1.5$

1. 3 anni
2. 1 anno
3. 2 anni
4. ~~nessuna delle precedenti~~ X

8) *(6 p.ti)* Enunciare e dimostrare il teorema dei due fondi