

Ripasso di Matematica per il Corso di Microeconomia

Mattia Albanese
albanesemattia1@gmail.com

A.A. 2025/2026

Indice

1	Elementi di Matematica	3
1.1	Potenze e radicali	3
1.1.1	Potenze	3
1.1.2	Radicali	3
1.1.3	Proprietà utili	3
1.2	Equazioni di primo grado a un'incognita	3
1.3	Le funzioni	4
1.3.1	Definizione e rappresentazione	4
1.3.2	La retta	4
1.3.3	Retta passante per due punti	4
1.3.4	Intersezione tra due rette: sistemi lineari	5
1.4	Logaritmi ed esponenziali	5
1.4.1	Equazioni esponenziali e logaritmi	5
1.4.2	Aspetto grafico (intuizione)	6
2	Le derivate	7
2.1	Derivata prima: significato	7
2.2	Regole di derivazione (schema)	7
2.3	Derivata e monotonia	9
2.3.1	Esempio: Funzione $f(x) = \sin(x)$ e sua derivata $f'(x) = \cos(x)$. . .	9
3	Derivata seconda e convessità/concavità	10
3.1	Concavità/convessità e derivate (esempio quadratico)	10
4	Funzioni a due variabili	12
4.1	Idea generale	12
4.2	Curve di livello	12
4.3	Derivate parziali	13
5	Esercizi	14
5.1	Calcolare le seguenti potenze	14
5.2	Scrivere in forma di potenza / radicale	14
5.3	Semplificare usando le proprietà delle potenze	14
5.4	Risolvere le seguenti equazioni	14
5.5	Individuare il coefficiente angolare e l'intercetta delle seguenti rette; rappresentare le rette in un piano cartesiano	15
5.6	Individuare l'equazione della retta passante tra i seguenti punti e rappresentarla graficamente	15
5.7	Individuare il punto di intersezione tra le seguenti rette	15
5.8	Derivare le seguenti funzioni	15
5.9	Massimizzare le seguenti funzioni concave	15
5.10	Minimizzare le seguenti funzioni convesse	15
5.11	Determinare l'equazione che esprime la curva di livello per le seguenti funzioni, dati i seguenti livelli	16
5.12	Determinare le derivate parziali relative alle funzioni del precedente esercizio	16

1 Elementi di Matematica

1.1 Potenze e radicali

1.1.1 Potenze

Dato un generico numero x , la potenza x^n indica il prodotto di x per se stesso ripetuto n volte. Ad esempio:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Promemoria essenziali:

- Per ogni $x > 0$, vale $x^0 = 1$.
- Per ogni x , vale $x^1 = x$.
- Per $n > 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (quando definito).

1.1.2 Radicali

La radice n -esima di x è il numero che elevato alla n restituisce x . Esempio:

$$\sqrt[3]{8} = 2.$$

Relazione tra radicali e potenze:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Osservazione sul dominio: le radici di indice pari richiedono (nei reali) argomento non negativo.

1.1.3 Proprietà utili

$$x^n x^m = x^{n+m}, \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}.$$

Per prodotti e quozienti con la stessa potenza:

$$x^n y^n = (xy)^n, \quad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n.$$

1.2 Equazioni di primo grado a un'incognita

Le equazioni lineari in una variabile sono uguaglianze di due polinomi di grado inferiore o uguale ad uno. Per grado si intende l'esponente più alto associato all'incognita x .

Per risolverle si usano trasformazioni equivalenti:

- aggiungere/sottrarre lo stesso numero a entrambi i membri;
- moltiplicare/dividere per lo stesso numero (non nullo) entrambi i membri.

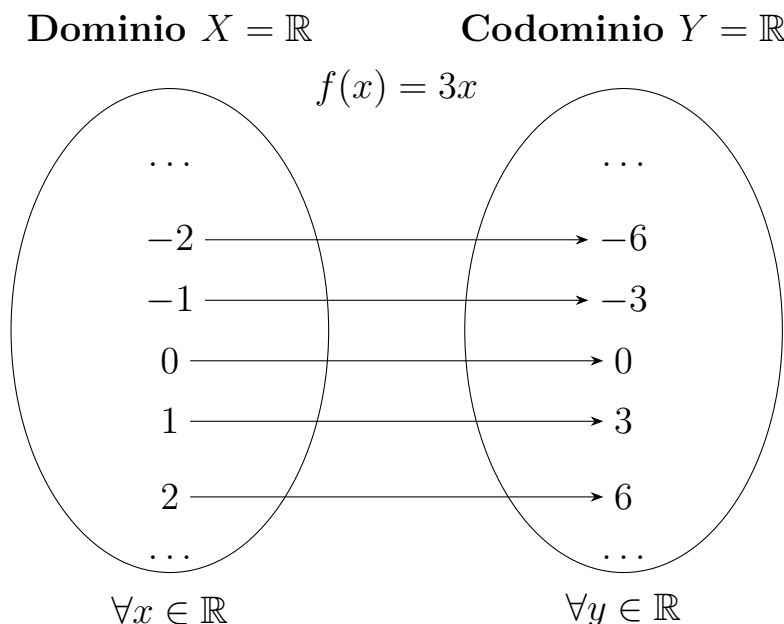
Esempio

$$2x + 3 = 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1.$$

1.3 Le funzioni

1.3.1 Definizione e rappresentazione

Una funzione è una relazione tra gli elementi di un insieme detto dominio e gli elementi di un secondo insieme, detto codominio. Nel caso di funzioni ad una sola variabile, il dominio corrisponde all'insieme dei valori ammissibili di x (la *variabile indipendente*), mentre il codominio è l'insieme dei valori della variabile *dipendente* y . In notazione: $y = f(x)$.



Nel piano cartesiano, x si colloca sull'asse orizzontale e y su quello verticale (vedi Figura 1); in microeconomia si lavora spesso nel primo quadrante, dato che nella maggior parte delle applicazioni x ha solo valori positivi.

1.3.2 La retta

La retta è rappresentata da funzioni caratterizzate dalla seguente forma:

$$y = mx + q,$$

dove:

- m è la pendenza (coefficiente angolare): positiva se la retta sale, negativa se scende, nulla per retta orizzontale;
- q è l'intercetta sull'asse y (valore di y quando $x = 0$).

Le rette verticali hanno equazione $x = k$ e non si scrivono come $y = mx + q$.

1.3.3 Retta passante per due punti

Dati $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 \neq x_1$, la pendenza è:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Poi si ricava q sostituendo le coordinate di un punto in $y = mx + q$ e risolvendo tale equazione lineare in q .

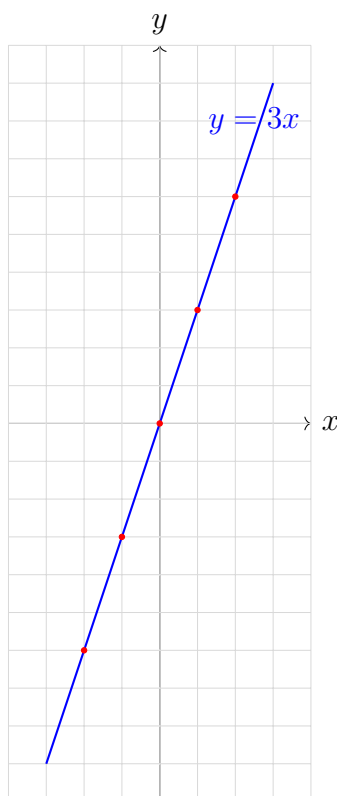


Figura 1: Rappresentazione grafica della funzione $y = 3x$

Esempio Per $P_1 = (3, 8)$ e $P_2 = (4, 5)$:

$$m = \frac{5 - 8}{4 - 3} = -3, \quad 8 = -3 \cdot 3 + q \Rightarrow q = 17,$$

quindi

$$y = -3x + 17.$$

1.3.4 Intersezione tra due rette: sistemi lineari

Il punto di incrocio tra due rette si trova risolvendo un sistema. Metodo tipico: sostituzione.

Esempio

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow y = 7 - x \Rightarrow 3x + 2(7 - x) = 5 \Rightarrow x = -9, y = 16.$$

1.4 Logaritmi ed esponenziali

1.4.1 Equazioni esponenziali e logaritmi

La funzione esponenziale in base a è la funzione che associa a ogni numero reale x la potenza a^x , con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Il logaritmo in base a di un numero positivo b è l'esponente a cui bisogna elevare a per ottenere b , cioè

$$\log_a(b) = x \iff a^x = b.$$

Un'equazione come $a^x = b$ si risolve, quando possibile, riscrivendo b come potenza della stessa base, oppure usando i logaritmi:

$$\log_a(b) = x \iff a^x = b.$$

Il logaritmo naturale è in base e :

$$\ln(b) = \log_e(b).$$

La funzione esponenziale e^x è inversa di $\ln(x)$.

1.4.2 Aspetto grafico (intuizione)

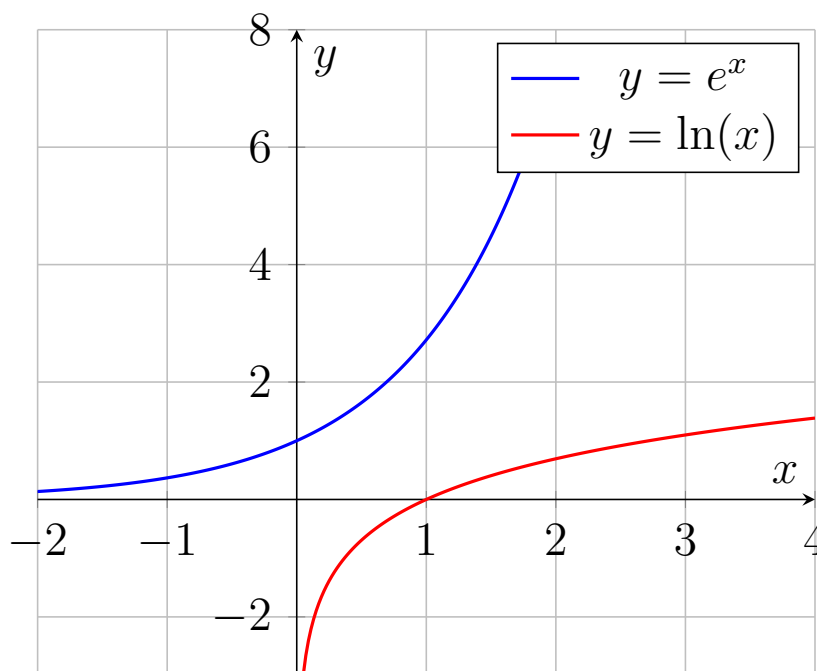


Figura 2: Rappresentazione grafica della funzione esponenziale e logaritmica

Come mostrato nella Figura 2, sia $\ln(x)$ sia e^x sono crescenti (nei rispettivi domini). L'esponenziale cresce rapidamente per x grandi; il logaritmo cresce lentamente. L'esponenziale interseca l'asse y in 1 (perché $e^0 = 1$); $\ln(x)$ è definito per $x > 0$ e ha un comportamento “a barriera” vicino a 0^+ .

2 Le derivate

2.1 Derivata prima: significato

La derivata prima $f'(x)$ misura la pendenza della retta tangente al grafico di f in un punto. In economia si interpreta anche come variazione marginale: quanto cambia y se x aumenta di una unità (in modo infinitesimo).

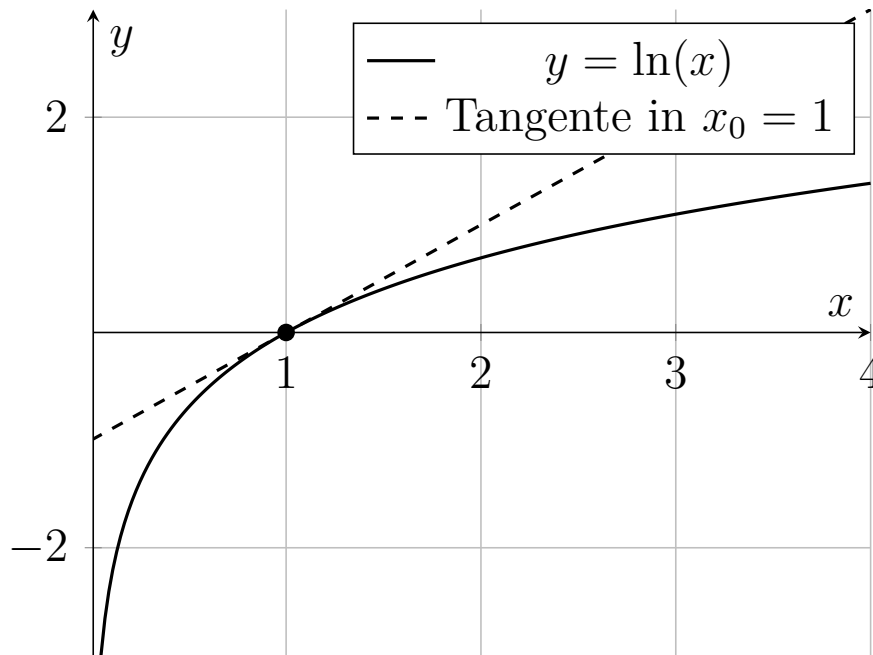


Figura 3: Rappresentazione grafica della funzione $y = \ln(x)$ e della sua tangente nel punto $x_0 = 1$. La derivata della funzione nel punto x_0 è: $\frac{1}{x_0} = 1$ e corrisponde al coefficiente angolare della tangente.

2.2 Regole di derivazione (schema)

Di seguito una tabella di regole standard.

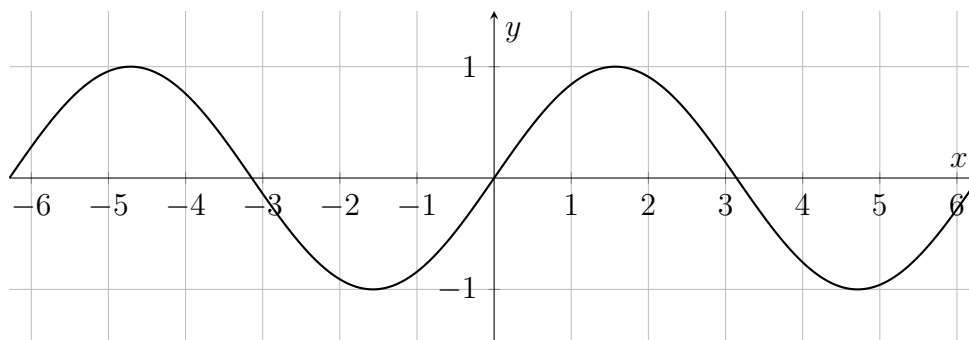
Funzione	Derivata
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = k h(x)$	$f'(x) = k h'(x)$
$f(x) = kx$	$f'(x) = k$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) h'(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = h(x) + g(x)$	$f'(x) = h'(x) + g'(x)$
$f(x) = h(x)g(x)$	$f'(x) = h'(x)g(x) + g'(x)h(x)$
$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$	$f'(x) = \frac{h'(x)g(x) - g'(x)h(x)}{[g(x)]^2}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

2.3 Derivata e monotonia

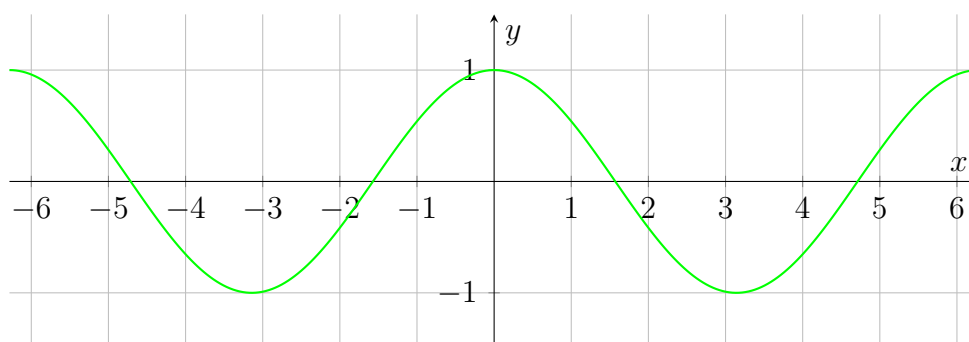
- Se $f'(x) < 0$, la funzione tende a diminuire.
- Se $f'(x) > 0$, la funzione tende ad aumentare.
- Se $f'(x) = 0$, il punto è stazionario (tangente orizzontale).

2.3.1 Esempio: Funzione $f(x) = \sin(x)$ e sua derivata $f'(x) = \cos(x)$

$$f(x) = \sin(x)$$



$$f'(x) = \cos(x)$$



3 Derivata seconda e convessità/concavità

La derivata seconda $f''(x)$ si ottiene derivando $f'(x)$.

- $f''(x) < 0$: funzione concava (curvatura verso il basso).
- $f''(x) > 0$: funzione convessa (curvatura verso l'alto).

Nell'ottimizzazione:

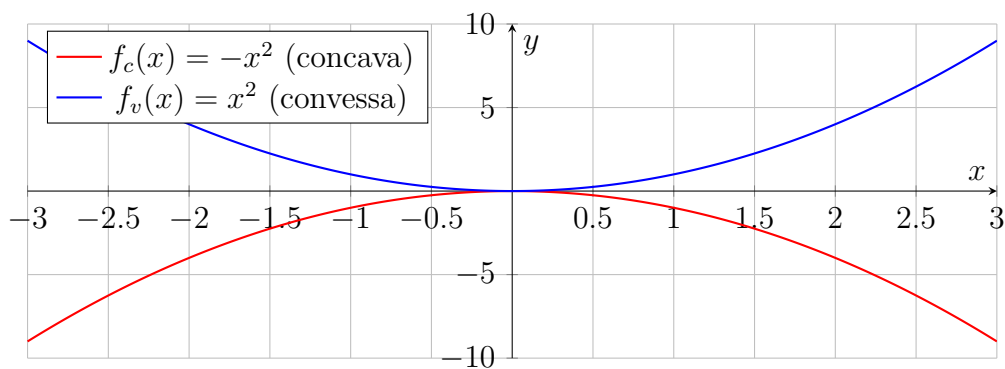
- massimo locale tipico: $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$;
- minimo locale tipico: $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) > 0$.

3.1 Concavità/convessità e derivate (esempio quadratico)

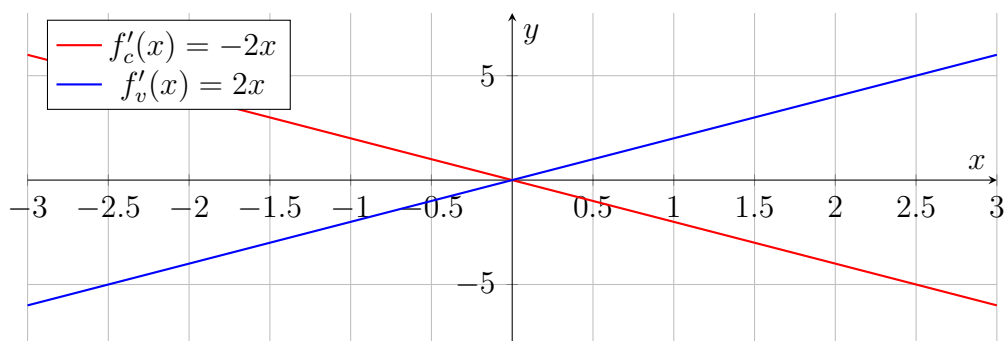
Scegliamo:

$$\begin{aligned} f_c(x) &= -x^2 \quad (\text{concava}), & f_v(x) &= x^2 \quad (\text{convessa}). \\ f'_c(x) &= -2x, & f'_v(x) &= 2x; & f''_c(x) &= -2, & f''_v(x) &= 2. \end{aligned}$$

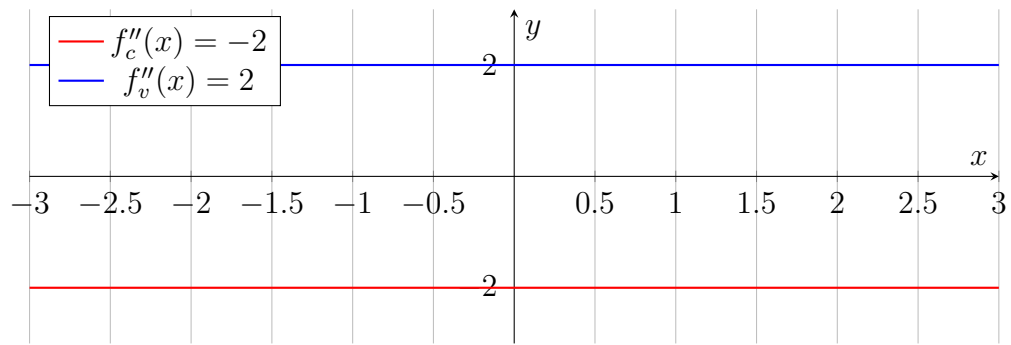
Funzioni: concava e convessa



Derivate prime



Derivate seconde



4 Funzioni a due variabili

4.1 Idea generale

Una funzione del tipo $Z = f(X, Y)$ associa a ogni coppia (X, Y) un valore Z , e si rappresenta in uno spazio a tre dimensioni.

Esempio: $Z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

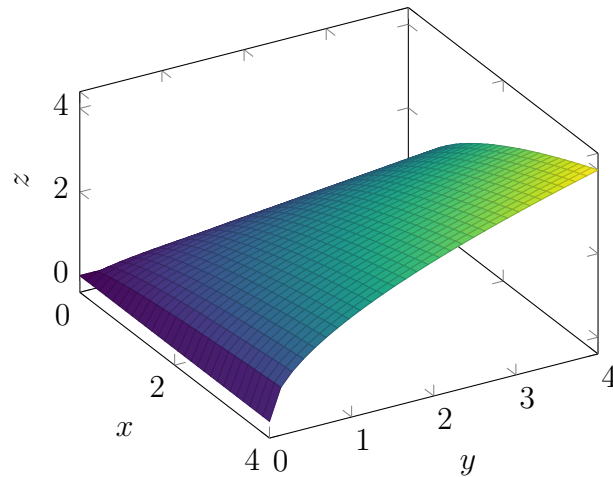


Figura 4: rappresentazione tridimensionale della funzione $Z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

4.2 Curve di livello

Fissato un valore Z_0 , la curva di livello è l'insieme dei punti (X, Y) tali che $f(X, Y) = Z_0$.

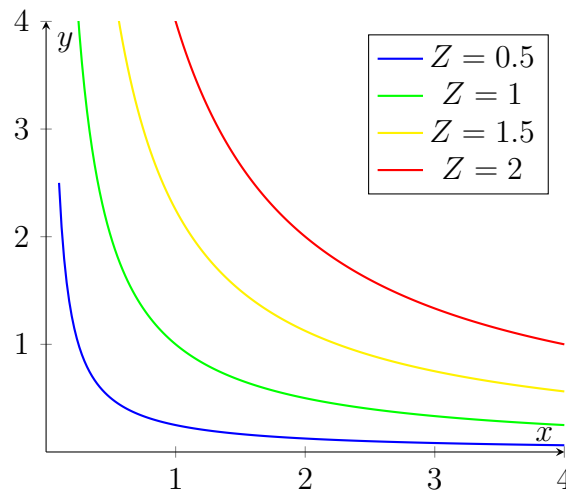


Figura 5: Curve di livello corrispondenti alla funzione $Z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

Esempio: se $Z = X^2Y^3$, la curva di livello $Z_0 = 8$ soddisfa

$$X^2Y^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad Y^3 = \frac{8}{X^2} \quad \Rightarrow \quad Y = \left(\frac{8}{X^2}\right)^{1/3}.$$

4.3 Derivate parziali

$\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X}$ misura l'effetto di X su Z tenendo Y costante, $\frac{\partial f}{\partial Y}$ analogo per Y .

Per calcolarle si deriva trattando l'altra variabile come costante. Geometricamente, questo corrisponde a fissare un livello sull'asse y , chiamato $\bar{y}$ e derivare il profilo di $Z = f(x, \bar{y})$ rispetto a x .

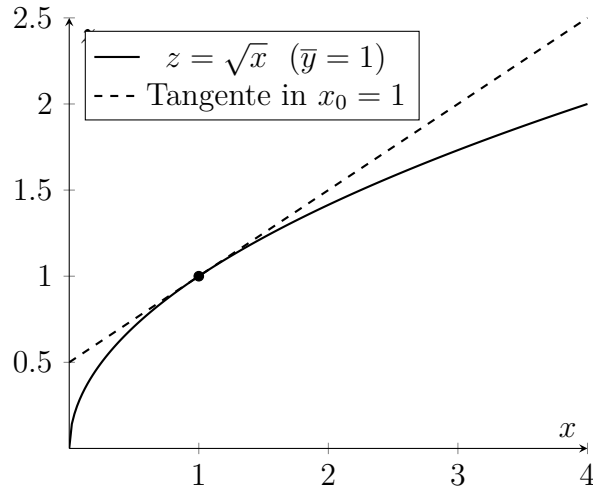


Figura 6: rappresentazione grafica della sezione della funzione $Z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ dato $\bar{y} = 1$. La derivata parziale rispetto ad x , dato $\bar{y} = 1$ corrisponde al coefficiente angolare della tangente in ciascun punto x_0 .

Esempio Per $Z = X^2Y^3$:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = 2XY^3, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = 3X^2Y^2.$$

5 Esercizi

5.1 Calcolare le seguenti potenze

1. 6^2
2. 3^3
3. 2^4
4. 6^{-2}
5. 3^{-3}
6. 2^{-4}

5.2 Scrivere in forma di potenza / radicale

1. $\sqrt[4]{3}$
2. $\sqrt[3]{3^5}$
3. $2^{\frac{1}{2}}$
4. $3^{\frac{4}{5}}$
5. $\sqrt[6]{10^6}$
6. $2^{-\frac{1}{2}}$

5.3 Semplificare usando le proprietà delle potenze

1. $5^3 \cdot 5$
2. $2^4 \cdot 2^{0.25}$
3. $\frac{6^5}{6}$
4. $\frac{30^0}{30}$
5. 6^{-1}
6. $7^{\frac{1}{2}}$

5.4 Risolvere le seguenti equazioni

1. $3x + 5 - 7x = 4x + 1$
2. $3 + 80x = -3 + 6x$
3. $2 + \frac{x+1}{4} = 5$

5.5 Individuare il coefficiente angolare e l'intercetta delle seguenti rette; rappresentare le rette in un piano cartesiano

1. $5 = 3x + 2y$
2. $3y = 18 + 6x$
3. $25 = 5y + 10x$
4. $y = 5x + 10 - 2x + 3$

5.6 Individuare l'equazione della retta passante tra i seguenti punti e rappresentarla graficamente

1. $(5, 2)$ $(3, 1)$
2. $(5, 2)$ $(5, 1)$
3. $(6, 1)$ $(4, 1)$
4. $(8, 3)$ $(7, 2)$

5.7 Individuare il punto di intersezione tra le seguenti rette

1. $y = 3x + 2$ e $5 = 2y + 3x$
2. $25 = 3x + 2y$ e $2y = 4x + 6$
3. $20x = 100$ e $25 = 5y + 10x$

5.8 Derivare le seguenti funzioni

1. $f(x) = 10x^3 + 100$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 20$
3. $f(x) = -200x - x^2 - 20x - 200$
4. $f(x) = x + 10 + x^2$
5. $f(x) = -x^2 + x^3 + 3281$

5.9 Massimizzare le seguenti funzioni concave

1. $f(x) = 50x - x^2 + 28$
2. $f(x) = -3x^2 + 3$
3. $f(x) = -4x^2 + 5x - 45$

5.10 Minimizzare le seguenti funzioni convesse

1. $f(x) = x + 10 + \frac{10000}{x}$
2. $f(x) = 4x^2 - 8x - 21$
3. $f(x) = -2x + \frac{16}{x}$

5.11 Determinare l'equazione che esprime la curva di livello per le seguenti funzioni, dati i seguenti livelli

1. $Z = x^2y^3$ con $Z_0 = 3$

2. $Z = x^2y$ con $Z_0 = 5$

3. $Z = x^2y^2$ con $Z_0 = 8$

4. $Z = x^3y^3$ con $Z_0 = 27$

5.12 Determinare le derivate parziali relative alle funzioni del precedente esercizio