

Ripasso di Matematica per il Corso di Microeconomia

Mattia Albanese

albanesemattia1@gmail.com

24 Febbraio, 2026

1 Elementi di Matematica

1 Potenze e radicali

2 Equazioni di primo grado a un'incognita

3 Le funzioni (definizione, retta, retta per due punti, sistemi)

4 Logaritmi ed esponenziali

2 Le derivate

3 Derivata seconda e convessità/concavità

4 Funzioni a due variabili

5 Esercizi

Potenze: definizione e promemoria

- Dato un numero generico x , la potenza x^n è il prodotto di x per se stesso ripetuto n volte.
- Esempio: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Promemoria essenziali:

- Per ogni $x > 0$: $x^0 = 1$.
- Per ogni x : $x^1 = x$.
- Per $n > 0$: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (quando definito).

Esercizi – Calcolare le seguenti potenze

1 6^2

2 3^3

3 2^4

4 6^{-2}

5 3^{-3}

6 2^{-4}

Radicali: definizione e relazione con potenze

- La radice n -esima di x è il numero che elevato alla n restituisce x .
- Esempio: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Relazione tra radicali e potenze:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Osservazione sul dominio:

- Indice pari $\Rightarrow$ (nei reali) argomento ≥ 0 .

Proprietà utili delle potenze

$$x^n x^m = x^{n+m}, \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}.$$

Prodotti e quozienti con la stessa potenza:

$$x^n y^n = (xy)^n, \quad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n.$$

Esercizi – Scrivere in forma di potenza / radicale

1 $\sqrt[4]{3}$

2 $\sqrt[3]{3^5}$

3 $2^{1/2}$

4 $3^{4/5}$

5 $\sqrt[6]{10^6}$

6 $2^{-1/2}$

Esercizi – Semplificare usando le proprietà delle potenze

1 $5^3 \cdot 5$

2 $2^4 \cdot 2^{0.25}$

3 $\frac{6^5}{6}$

4 $\frac{300}{30}$

5 6^{-1}

6 $7^{1/2}$

Equazioni lineari in una variabile

- Uguaglianze di polinomi di grado ≤ 1 .
- Il grado è l'esponente più alto dell'incognita x .

Trasformazioni equivalenti:

- Aggiungere/sottrarre lo stesso numero a entrambi i membri.
- Moltiplicare/dividere per lo stesso numero (non nullo) entrambi i membri.

Esempio:

$$2x + 3 = 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1.$$

Esercizi – Risolvere le seguenti equazioni

1 $3x + 5 - 7x = 4x + 1$

2 $3 + 80x = -3 + 6x$

3 $2 + \frac{x+1}{4} = 5$

Funzioni: definizione e rappresentazione

- Una funzione è una relazione tra un insieme **dominio** e un insieme **codominio**.
- In una variabile: $y = f(x)$.
- Il dominio è l'insieme dei valori ammissibili di x ; il codominio riguarda i valori di y .

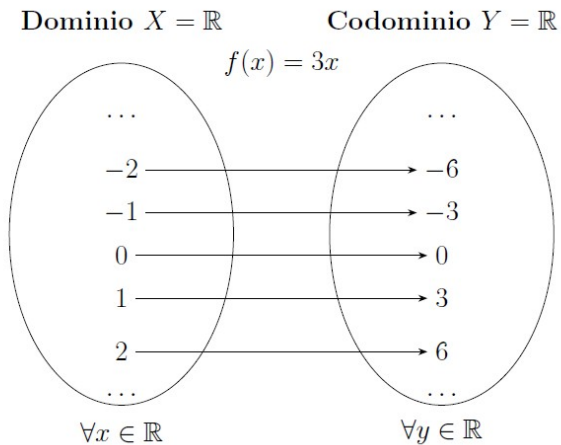
Esempio: $f(x) = 3x$ con $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nel piano cartesiano:

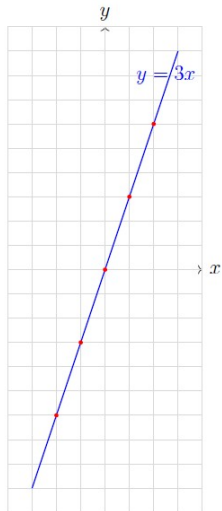
- x sull'asse orizzontale, y su quello verticale.
- In microeconomia spesso si lavora nel primo quadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

Figura 1: grafico di $y = 3x$

Funzioni: Dominio e Codominio



Esempio: grafico di $y = 3x$



La retta

La retta ha forma:

$$y = mx + q$$

dove:

- m = pendenza (coefficiente angolare): positiva se sale, negativa se scende, nulla se orizzontale;
- q = intercetta sull'asse y (valore di y quando $x = 0$).

Nota: le rette verticali hanno equazione $x = k$ e non si scrivono come $y = mx + q$.

Esercizi – Coefficiente angolare e intercetta

Individuare coefficiente angolare e intercetta; rappresentare le rette in un piano cartesiano:

1 $5 = 3x + 2y$

2 $3y = 18 + 6x$

3 $25 = 5y + 10x$

4 $y = 5x + 10 - 2x + 3$

Retta passante per due punti

Dati $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 \neq x_1$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Poi si trova q sostituendo un punto in $y = mx + q$ e risolvendo in q .

Esempio: $P_1 = (3, 8)$, $P_2 = (4, 5)$

$$m = \frac{5 - 8}{4 - 3} = -3, \quad 8 = -3 \cdot 3 + q \Rightarrow q = 17.$$

Quindi:

$$y = -3x + 17.$$

Esercizi – Retta passante per due punti

Individuare l'equazione della retta passante per i punti e rappresentarla graficamente:

1 $(5,2)$ e $(3,1)$

2 $(5,2)$ e $(5,1)$

3 $(6,1)$ e $(4,1)$

4 $(8,3)$ e $(7,2)$

Intersezione tra due rette: sistemi lineari

Il punto di incrocio tra due rette si trova risolvendo un sistema (metodo tipico: sostituzione).

Esempio:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow y = 7 - x \Rightarrow 3x + 2(7 - x) = 5 \Rightarrow x = -9, y = 16.$$

Esercizi – Punto di intersezione tra rette

1 $y = 3x + 2$ e $5 = 2y + 3x$

2 $25 = 3x + 2y$ e $2y = 4x + 6$

3 $20x = 100$ e $25 = 5y + 10x$

Esponenziali e logaritmi: definizioni

Esponenziale in base a :

- associa a ogni $x \in \mathbb{R}$ la potenza a^x , con $a > 0$ e $a \neq 1$.

Logaritmo in base a di $b > 0$:

$$\log_a(b) = x \iff a^x = b.$$

Logaritmo naturale: $\ln(b) = \log_e(b)$.

Inversa: e^x è inversa di $\ln(x)$.

Equazioni esponenziali (intuizione) e grafici

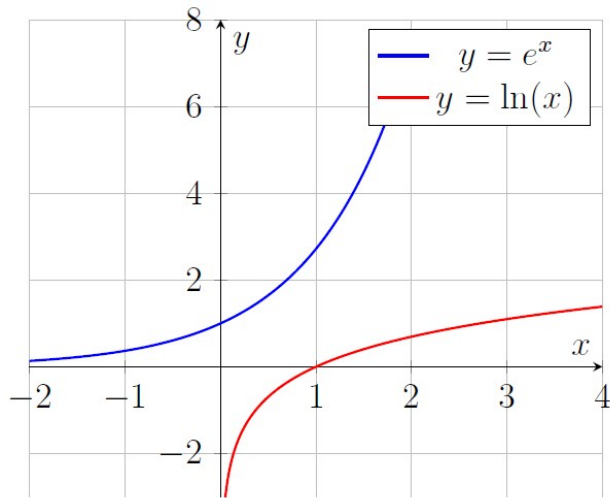
Un'equazione del tipo $a^x = b$ si risolve:

- riscrivendo b come potenza della stessa base (quando possibile), oppure
- usando i logaritmi: $\log_a(b) = x$.

Aspetto grafico (intuizione):

- $\ln(x)$ definita per $x > 0$; “barriera” vicino a 0^+ .
- e^x cresce rapidamente per x grandi; interseca l'asse y in 1 ($e^0 = 1$).

Grafico di $y = e^x$ e $y = \ln(x)$

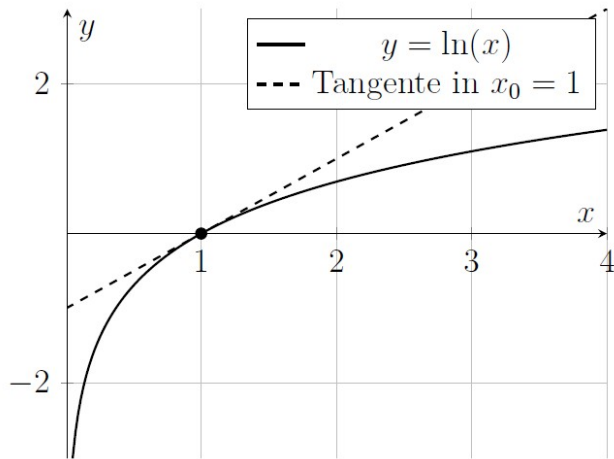


Derivata prima: significato

La derivata prima $f'(x)$ misura:

- la pendenza della retta tangente al grafico di f in un punto;
- in economia: variazione marginale (quanto cambia y se x aumenta di una unità, in modo infinitesimo).

Esempio: $y = \ln(x)$ e tangente in $x_0 = 1$ (pendenza $1/x_0 = 1$)



Regole di derivazione 1

Funzione

$$f(x) = k$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = k h(x)$$

$$f(x) = kx$$

$$f(x) = x^n$$

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f(x) = \log_a(x)$$

Derivata

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 1$$

$$f'(x) = k h'(x)$$

$$f'(x) = k$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = g'(h(x)) h'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Regole di derivazione 2

Funzione

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x$$

$$f(x) = h(x) + g(x)$$

$$f(x) = h(x)g(x)$$

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

Derivata

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(x) = a^x \ln(a)$$

$$f'(x) = h'(x) + g'(x)$$

$$f'(x) = h'(x)g(x) + g'(x)h(x)$$

$$f'(x) = \frac{h'(x)g(x) - g'(x)h(x)}{[g(x)]^2}$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

Esercizi – Derivare le seguenti funzioni

1 $f(x) = 10x^3 + 100$

2 $f(x) = x^2 + 4x + 20$

3 $f(x) = -200x - x^2 - 20x - 200$

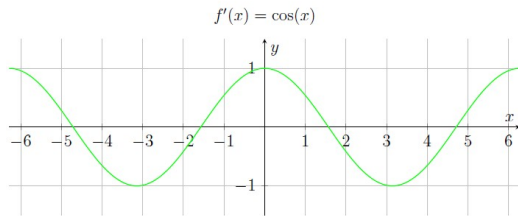
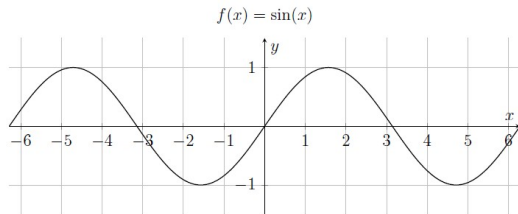
4 $f(x) = x + 10 + x^2$

5 $f(x) = -x^2 + x^3 + 3281$

Derivata e monotonia

- Se $f'(x) < 0$, la funzione tende a diminuire.
- Se $f'(x) > 0$, la funzione tende ad aumentare.
- Se $f'(x) = 0$, il punto è stazionario (tangente orizzontale).

Esempio: $f(x) = \sin(x)$ e $f'(x) = \cos(x)$



Derivata seconda e forma della funzione

La derivata seconda $f''(x)$ si ottiene derivando $f'(x)$.

- $f''(x) < 0$: funzione **concava** (curvatura verso il basso).
- $f''(x) > 0$: funzione **convessa** (curvatura verso l'alto).

Ottimizzazione:

- massimo locale tipico: $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$;
- minimo locale tipico: $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) > 0$.

Esempio quadratico: concava vs convessa

Scegliamo:

$$f_c(x) = -x^2 \text{ (concava)}, \quad f_v(x) = x^2 \text{ (convessa)}.$$

Derivate:

$$f'_c(x) = -2x, \quad f'_v(x) = 2x; \quad f''_c(x) = -2, \quad f''_v(x) = 2.$$

Grafico: funzioni $-x^2$ e x^2 Grafico: derivate prime $-2x$ e $2x$ Grafico: derivate seconde -2 e 2

Esercizi – Massimizzare funzioni concave

1 $f(x) = 50x - x^2 + 28$

2 $f(x) = -3x^2 + 3$

3 $f(x) = -4x^2 + 5x - 45$

Esercizi – Minimizzare funzioni convesse

1 $f(x) = x + 10 + \frac{10000}{x}$

2 $f(x) = 4x^2 - 8x - 21$

3 $f(x) = -2x + \frac{16}{x}$

Idea generale: funzioni a due variabili

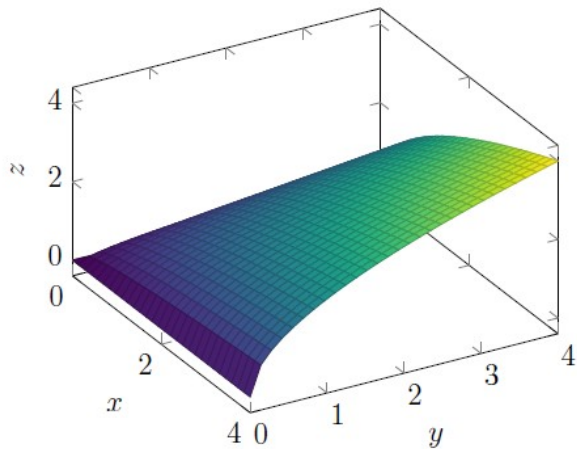
Una funzione $Z = f(X, Y)$ associa a ogni coppia (X, Y) un valore Z .

Si rappresenta in uno spazio a tre dimensioni.

Esempio:

$$Z = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}.$$

Esempio: grafico 3D di $z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$



Curve di livello

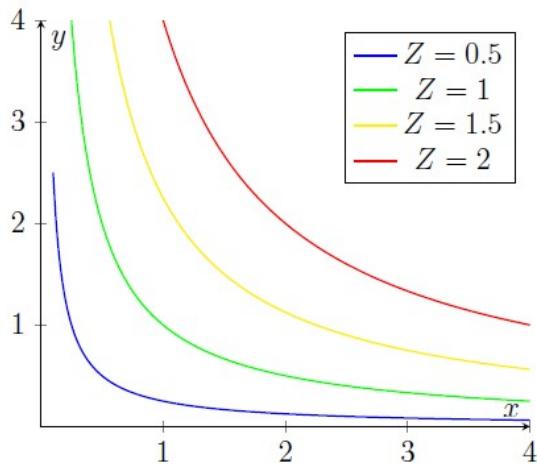
Fissato un valore Z_0 , la curva di livello è l'insieme dei punti (X, Y) tali che:

$$f(X, Y) = Z_0.$$

Esempio: se $Z = X^2 Y^3$ e $Z_0 = 8$:

$$X^2 Y^3 = 8 \Rightarrow Y^3 = \frac{8}{X^2} \Rightarrow Y = \left(\frac{8}{X^2} \right)^{1/3}.$$

Curve di livello per $Z = x^{1/2}y^{1/2}$



Derivate parziali: significato e calcolo

$\frac{\partial f(X, Y)}{\partial X}$ misura l'effetto di X su Z tenendo Y costante; $\frac{\partial f}{\partial Y}$ analogo per Y .

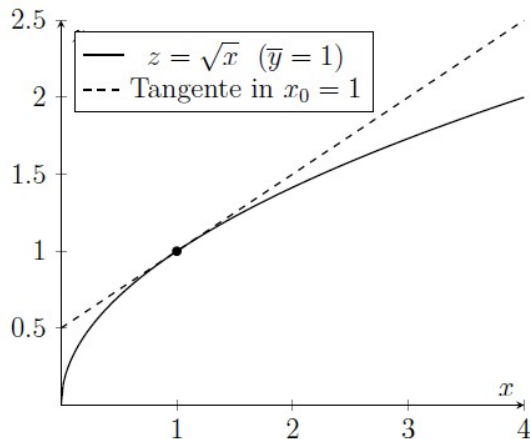
Per calcolarle: si deriva trattando l'altra variabile come costante.

Interpretazione geometrica (idea): fissare un valore $y = \bar{y}$ e derivare la sezione $Z = f(x, \bar{y})$ rispetto a x .

Esempio: per $Z = X^2 Y^3$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = 2X Y^3, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = 3X^2 Y^2.$$

Derivate Parziali: intuizione grafica



$z = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$. Sezione con $y = 1$ e tangente in $x_0 = 1$

Esercizi – Curve di livello

Determinare l'equazione della curva di livello per le seguenti funzioni, dato Z_0 :

1 $Z = x^2y^3$ con $Z_0 = 3$

2 $Z = x^2y$ con $Z_0 = 5$

3 $Z = x^2y^2$ con $Z_0 = 8$

4 $Z = x^3y^3$ con $Z_0 = 27$

Esercizi – Derivate parziali

Determinare le derivate parziali relative alle funzioni dell'esercizio precedente.