

Esercitazione 1: il problema di massimizzazione dell'utilità

Mattia Albanese
albanesemattia1@gmail.com

A.A. 2025/2026

Indice

1	Esercizio 1: Curve di Utilità e SMS	3
1.1	Soluzione	3
2	Esercizio 2: Vincolo di Bilancio	4
2.1	Soluzione	4
3	Esercizio 3: il Paniere Ottimo	5
3.1	Soluzione	5
4	Esercizio 4: Beni Perfetti Complementi	6
4.1	Soluzione	6

1 Esercizio 1: Curve di Utilità e SMS

Data la seguente funzione di utilità:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

Determinare:

1. l'equazione di una generica curva di indifferenza
2. l'equazione della curva di indifferenza tale che il livello dell'utilità è $\bar{U} = 3$
3. la pendenza delle curve di indifferenza

1.1 Soluzione

Per ottenere l'equazione di una generica curva di indifferenza, fissiamo un generico livello di utilità k .

$$x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} = k$$

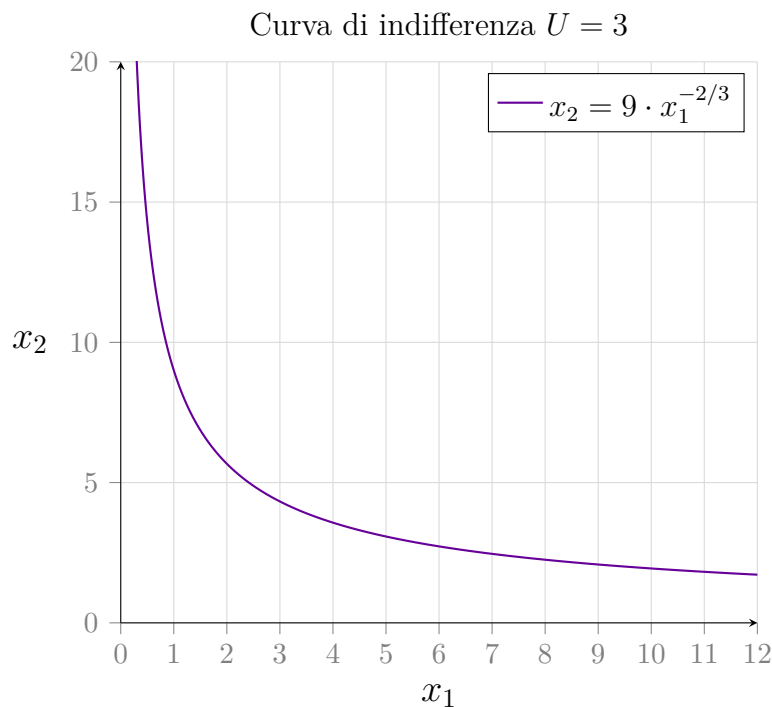
Isoliamo una delle due variabili

$$x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{x_1^{\frac{1}{3}}} \implies x_2 = k^2 x_1^{-\frac{2}{3}}$$

Per ottenere l'equazione corrispondente al livello $\bar{U} = 3$, è sufficiente fissare $k = 3$:

$$x_2 = 3^2 x_1^{-\frac{2}{3}} = 9x_1^{-\frac{2}{3}}$$

Rappresentazione grafica:



Per calcolare la pendenza delle curve di indifferenza è necessario prima calcolare il saggio marginale di sostituzione:

$$SMS_{1,2} = \frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
U'_{x_1} &= \frac{1}{3}x_1^{\frac{1}{3}-1}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{2}} \\
U'_{x_2} &= \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{1}{2}} \\
SMS_{1,2} &= \frac{\frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}x_1^{-1}x_2 = \frac{2x_2}{3x_1}
\end{aligned}$$

La pendenza della curva di indifferenza è:

$$-|SMS_{1,2}| = -\frac{2x_2}{3x_1}$$

2 Esercizio 2: Vincolo di Bilancio

Dati il prezzo del bene 1, $p_1 = 4$ e del bene 2, $p_2 = 6$, ed il reddito del consumatore $R = 40$, determinare:

1. l'equazione del vincolo di bilancio
2. il grafico del vincolo di bilancio
3. la pendenza e i punti di intersezione con i due assi x_1, x_2

2.1 Soluzione

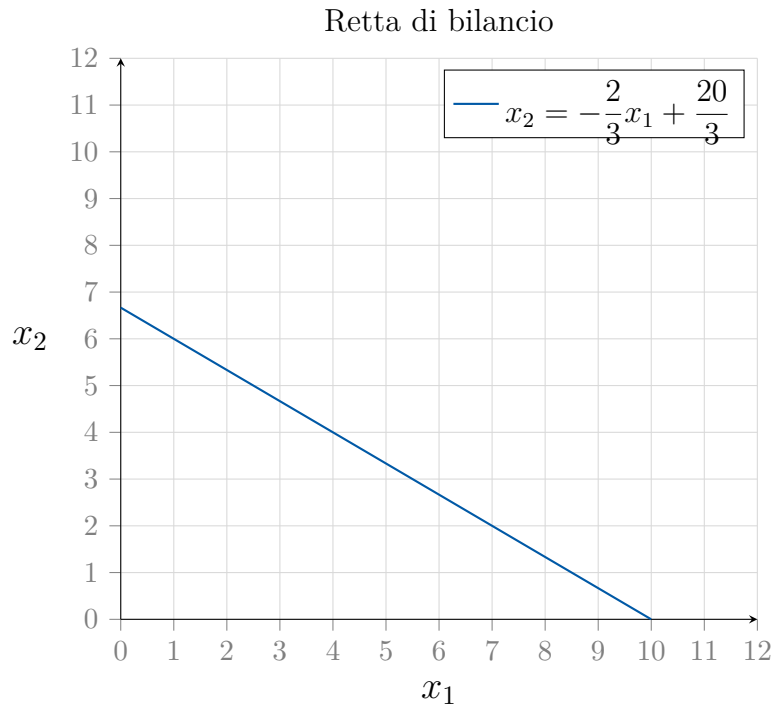
Il vincolo di bilancio segue la formula

$$\begin{aligned}
R &= p_1x_1 + p_2x_2 \\
40 &= 4x_1 + 6x_2
\end{aligned}$$

Per poter tracciare il grafico, isoliamo x_2 in funzione di x_1

$$\begin{aligned}
20 &= 2x_1 + 3x_2 \\
3x_2 &= 20 - 2x_1 \\
x_2 &= -\frac{2}{3}x_1 + \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

L'intercetta con l'asse x_2 è il punto $x_1 = 0, x_2 = \frac{20}{3}$. Quello con l'asse x_1 è il punto $x_2 = 0, x_1 = 10$. Il coefficiente angolare è $m = -\frac{2}{3}$. Rappresentazione grafica:



3 Esercizio 3: il Paniere Ottimo

Data la seguente curva di utilità:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

Indicare la scelta di ottimo per un consumatore con un reddito $R = 100$, e un paniere con beni $p_1 = p_2 = 10$

3.1 Soluzione

Per ricavare il paniere ottimo, bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} & \text{Condizione di Tangenza} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 & \text{Vincolo di Bilancio} \end{cases}$$

Procediamo a calcolare SMS:

$$\begin{aligned} U'_{x_1} &= \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \\ U'_{x_2} &= \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} \\ SMS &= \frac{\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Dunque il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{10} \implies x_1 = x_2 \\ 100 = 10x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{10} \implies x_1 = x_2 \\ 100 = 10x_1 + 10x_1 \implies x_1^* = \frac{200}{20} = 10 \end{cases}$$

La soluzione è dunque $x_1^* = 10$, $x_2^* = 10$.

4 Esercizio 4: Beni Perfetti Complementi

Si consideri la seguente funzione di utilità:

$$U = \min\{2x_1, x_2\}$$

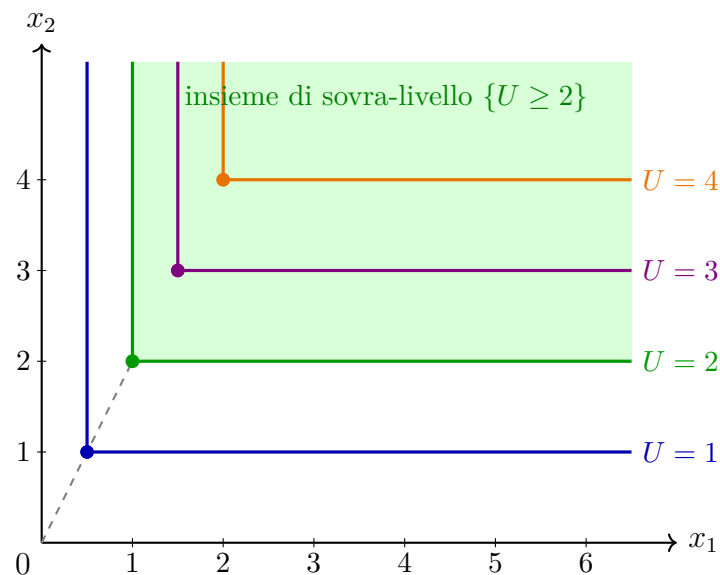
Tracciare sul piano x_1, x_2 il sistema di curve di indifferenza corrispondente e verificare la convessità delle preferenze.

4.1 Soluzione

Dato un generico livello di utilità $U = k > 0$, la condizione $\min 2x_1, x_2 = k$ si può dividere in due condizioni, a seconda di quale dei due argomenti sia il minore:

1. Ramo verticale: $2x_1 = k$ e $x_2 \geq k$, $\implies x_1 = k/2$
2. Ramo orizzontale: $2x_1 \geq k$ e $x_2 = k$

Ogni curva sarà quindi a forma di L, con vertice nel punto $(x_1, x_2) = (k/2, k)$. La bisettrice che definisce il rapporto di complementarità è dunque $x_2 = 2x_1$.



Per verificare la convessità/concavità delle curve di indifferenza, si prendano due punti qualsiasi appartenenti ad un determinato insieme di sopra-livello, ad esempio $\{U \geq 2\}$:

$$\begin{aligned} A &\equiv (1, 4) & B &\equiv (4, 2) \\ U(A) &= U(B) = 2 \end{aligned}$$

Si prenda una combinazione convessa di questi due punti, dato un generico coefficiente α , in questo caso $\alpha = 0.5$:

$$\begin{aligned}U[\alpha A + (1 - \alpha)B] &= \\U[0.5(1) + 0.5(4); 0.5(4) + 0.5(2)] &= \\U(2.5; 3) &= 3 > 2\end{aligned}$$

Le preferenze sono dunque convesse, dato che l'utilità del paniere derivato ottenuto come combinazione di due panieri di partenza è maggiore dell'utilità originaria.