

Esercitazione 3: le scelte dell'imprenditore

Mattia Albanese
albanesemattia1@gmail.com

A.A. 2025/2026

Indice

1	Isoquanto e Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica	3
1.1	Soluzione	3
2	Curve di Isocosto	3
2.1	Soluzione	4
3	Costi e produttività	4
4	Il problema della minimizzazione dei costi nel lungo periodo	5
4.1	Soluzione	5

1 Isoquanto e Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica

Data la seguente funzione di produzione

$$Y = f(L, K) = 4L^2K^2$$

calcolare:

1. l'equazione di un generico isoquanto;
2. il Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica.

1.1 Soluzione

L'isoquanto è la curva di livello della funzione di produzione dato un generico livello di output $\bar{q}$. Di conseguenza, basta fissare:

$$\begin{aligned}\bar{q} &= f(L, K) = 4L^2K^2 \\ L^2 &= \frac{\bar{q}}{4K^2} \longrightarrow L = \frac{\sqrt{\bar{q}}}{2K}\end{aligned}$$

assumendo $K > 0$.

Il SMST è il rapporto tra la produttività marginale del lavoro e la produttività marginale del capitale.

Il SMST si ottiene definendo il cambiamento marginale dell'output in funzione dei due input, e imponendolo uguale a zero:

$$\begin{aligned}dY &= \frac{\partial f(L, K)}{\partial K}dK + \frac{\partial f(L, K)}{\partial L}dL = 0 \\ \frac{\partial f(L, K)}{\partial K}dK &= -\frac{\partial f(L, K)}{\partial L}dL \\ \frac{dK}{dL} &= -\frac{\frac{\partial f(L, K)}{\partial L}}{\frac{\partial f(L, K)}{\partial K}} \\ SMST &= \left| \frac{dK}{dL} \right| = \frac{\frac{\partial f(L, K)}{\partial L}}{\frac{\partial f(L, K)}{\partial K}}\end{aligned}$$

Nel caso di questo esercizio:

$$\frac{\partial f(L, K)}{\partial L} = 8LK^2, \quad \frac{\partial f(L, K)}{\partial K} = 8L^2K.$$

Dunque:

$$SMST = \frac{8LK^2}{8L^2K} = \frac{K}{L}.$$

2 Curve di Isocosto

Data la seguente funzione di spesa:

$$CT = 20L + 10K$$

calcolare:

1. l'equazione di un generico isocosto;
2. l'equazione degli isocosti corrispondenti ai livelli $\bar{c} = 1$ e $\bar{c} = 5$ e tracciare una rappresentazione grafica.

2.1 Soluzione

In generale, l'equazione di isocosto definisce le combinazioni dei fattori di produzione che realizzano un dato livello di costo:

$$\bar{c} = wL + rK \longrightarrow K = -\frac{w}{r}L + \frac{\bar{c}}{r}$$

Per calcolare le equazioni degli isocosti specifici basta sostituire i valori corrispondenti:

- per $\bar{c} = 1$:

$$1 = 20L + 10K \longrightarrow K = -2L + \frac{1}{10}$$

- per $\bar{c} = 5$:

$$5 = 20L + 10K \longrightarrow K = -2L + \frac{5}{10} = -2L + \frac{1}{2}$$

3 Costi e produttività

Date le funzioni di produzione e costo:

$$Y = f(K, L) = K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}}$$

$$C(Q) = 2Q(Q + 20) + 100 = 2Q^2 + 40Q + 100$$

calcolare:

1. Costo variabile

$$CV(Q) = 2Q^2 + 40Q$$

2. Costo fisso

$$CF(Q) = 100$$

3. Costo medio

$$CMe(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{2Q^2 + 40Q + 100}{Q} = 2Q + 40 + \frac{100}{Q}$$

4. Costo medio variabile

$$CMeV(Q) = \frac{CV(Q)}{Q} = \frac{2Q^2 + 40Q}{Q} = 2Q + 40$$

5. Costo medio fisso

$$CMeF(Q) = \frac{CF(Q)}{Q} = \frac{100}{Q}$$

6. Costo marginale

$$CMa(Q) = \frac{\partial C(Q)}{\partial Q} = 4Q + 40$$

7. Produttività media del lavoro

$$PMeL = \frac{Y}{L} = \frac{K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}}}{L} = K^{\frac{2}{5}}L^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{5}}$$

8. Produttività media del capitale

$$PMeK = \frac{Y}{K} = \frac{K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}}}{K} = K^{-\frac{3}{5}}L^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{3}{5}}$$

9. Produttività marginale del lavoro

$$PMaL = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{3}{5}K^{\frac{2}{5}}L^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{5}}$$

10. Produttività marginale del capitale

$$PMaK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{2}{5}K^{-\frac{3}{5}}L^{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{3}{5}}$$

4 Il problema della minimizzazione dei costi nel lungo periodo

Data la seguente funzione di produzione:

$$Y = K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

Risolvere il problema della minimizzazione dei costi per l'isoquante corrispondente al livello $q = 200$, sapendo che:

$$CT = wL + rK,$$

dove $w = 16$ e $r = 1$.

4.1 Soluzione

Per trovare la funzione dell'isoquante, poniamo:

$$K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}} = 200$$

Elevando entrambi i membri alla quarta:

$$KL = 200^4 \longrightarrow K = \frac{200^4}{L}.$$

Per risolvere il problema di minimizzazione, bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{r} \\ \bar{q} = f(L, K) \end{cases}$$

Calcoliamo il SMST:

$$\begin{aligned} SMST &= \frac{\frac{\partial f(L,K)}{\partial L}}{\frac{\partial f(L,K)}{\partial K}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{4}K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{K}{L}. \end{aligned}$$

Poiché:

$$\frac{w}{r} = \frac{16}{1} = 16,$$

si ha:

$$\frac{K}{L} = 16 \longrightarrow K = 16L.$$

Sostituendo nell'isoquanto:

$$\begin{aligned} K &= \frac{200^4}{L} \\ 16L &= \frac{200^4}{L} \\ 16L^2 &= 200^4 \\ L^2 &= \frac{200^4}{16} \\ L &= \frac{200^2}{4} = 10000. \end{aligned}$$

Quindi:

$$K = 16L = 16 \cdot 10000 = 160000.$$

La combinazione ottima dei fattori è dunque:

$L^* = 10000, \quad K^* = 160000.$
