

Rendimenti di Scala e Massimizzazione del Profitto

Esercizi di Microeconomia

Indice

1	Nozioni preliminari sui rendimenti di scala	1
1.1	Criterio generale	2
1.2	Caso Cobb–Douglas	2
2	Esercizio 1 — Identificazione dei rendimenti di scala	2
3	Collegamento tra rendimenti di scala e costo medio	3
4	Esercizio 2 — Rendimenti di scala tramite il costo medio	4
5	Massimizzazione del profitto nel breve periodo	4
6	Esercizio 3 — Domanda di lavoro ottimale	5
7	Concorrenza perfetta nel breve e nel lungo periodo	5
7.1	Equilibrio di lungo periodo	6
8	Esercizio 4 — Concorrenza perfetta: offerta e equilibrio di mercato	6

Nozioni preliminari sui rendimenti di scala

Si dice che una funzione di produzione $f(K, L)$ presenta **rendimenti di scala**:

- **Crescenti** quando, incrementando tutti i fattori produttivi nella stessa proporzione, la quantità prodotta cresce in misura *più che proporzionale*.
- **Costanti** quando, incrementando tutti i fattori produttivi nella stessa proporzione, la quantità prodotta cresce nella *stessa proporzione*.
- **Decrescenti** quando, incrementando tutti i fattori produttivi nella stessa proporzione, la quantità prodotta cresce in misura *meno che proporzionale*.

Criterio generale

Per verificare i rendimenti di scala di una funzione $f(K, L)$ è sufficiente moltiplicare ciascun fattore per una costante $\lambda > 0$ e confrontare $f(\lambda K, \lambda L)$ con $\lambda f(K, L)$:

$$\begin{cases} f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L) & \Rightarrow \text{rendimenti crescenti} \\ f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L) & \Rightarrow \text{rendimenti costanti} \\ f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L) & \Rightarrow \text{rendimenti decrescenti} \end{cases}$$

Caso Cobb–Douglas

Una funzione di tipo Cobb–Douglas ha la forma generale:

$$f(K, L) = K^\alpha L^\beta$$

Applicando il criterio precedente si ottiene:

$$f(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} K^\alpha L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} f(K, L)$$

Il confronto con $\lambda f(K, L)$ si riduce quindi al confronto tra $\lambda^{\alpha+\beta}$ e λ^1 , da cui:

$$\begin{cases} \alpha + \beta > 1 & \Rightarrow \text{rendimenti crescenti} \\ \alpha + \beta = 1 & \Rightarrow \text{rendimenti costanti} \\ \alpha + \beta < 1 & \Rightarrow \text{rendimenti decrescenti} \end{cases}$$

Esercizio 1 — Identificazione dei rendimenti di scala

Testo. Per ciascuna delle funzioni di produzione elencate di seguito, determinate la tipologia di rendimenti di scala. Accompagnate ogni risposta con una breve descrizione del significato economico del risultato ottenuto.

1. $f(K, L) = 2(L + K)$
2. $f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{6}}$
3. $f(K, L) = 2(LK)^{\frac{1}{2}}$
4. $f(K, L) = L + K^2$
5. $f(K, L) = L^3 K^5$

Soluzione

1. $f(K, L) = 2(L + K)$

Calcoliamo $f(\lambda K, \lambda L)$:

$$f(\lambda K, \lambda L) = 2(\lambda L + \lambda K) = 2\lambda(L + K) = \lambda \cdot 2(L + K) = \lambda f(K, L)$$

Poiché $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$, la funzione presenta **rendimenti di scala costanti**.

2. $f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{6}}$

Si tratta di una Cobb–Douglas; verifichiamo la somma degli esponenti:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$$

La funzione presenta quindi **rendimenti di scala decrescenti**.

3. $f(K, L) = 2(LK)^{\frac{1}{2}} = 2 L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$

Somma degli esponenti:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

La funzione presenta **rendimenti di scala costanti**.

4. $f(K, L) = L + K^2$

Questa funzione *non* è Cobb–Douglas; usiamo il criterio generale:

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda L + (\lambda K)^2 = \lambda L + \lambda^2 K^2$$

Confrontiamo con $\lambda f(K, L) = \lambda L + \lambda K^2$:

$$\lambda L + \lambda^2 K^2 \quad \text{vs} \quad \lambda L + \lambda K^2$$

Poiché $\lambda^2 > \lambda$ per ogni $\lambda > 1$, si ha $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$: la funzione presenta **rendimenti di scala crescenti**.

5. $f(K, L) = L^3 K^5$

Somma degli esponenti:

$$3 + 5 = 8 > 1$$

La funzione presenta **rendimenti di scala crescenti**.

Collegamento tra rendimenti di scala e costo medio

Il **costo medio** di un'impresa, definito come $\text{CMe}(Q) = CT(Q)/Q$, è strettamente legato ai rendimenti di scala della sua tecnologia produttiva:

- CMe **costante** al crescere di $Q \Rightarrow$ i fattori aumentano in proporzione $\Rightarrow$ **rendimenti costanti**.
- CMe **crescente** al crescere di $Q \Rightarrow$ i fattori crescono meno che proporzionalmente $\Rightarrow$ **rendimenti decrescenti**.
- CMe **decrescente** al crescere di $Q \Rightarrow$ i fattori crescono più che proporzionalmente $\Rightarrow$ **rendimenti crescenti**.

Esercizio 2 — Rendimenti di scala tramite il costo medio

Testo. Date le seguenti funzioni di costo totale, ricavate i rendimenti di scala dell'impresa analizzando il comportamento del costo medio al variare del livello di produzione Q .

1. $CT(Q) = 5Q$
2. $CT(Q) = 3Q^{\frac{1}{3}}$
3. $CT(Q) = 8Q^4$

Soluzione

1. $CT(Q) = 5Q$

$$CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{5Q}{Q} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial CMe}{\partial Q} = 0$$

Il costo medio è costante: **rendimenti di scala costanti**.

2. $CT(Q) = 3Q^{\frac{1}{3}}$

$$CMe(Q) = \frac{3Q^{\frac{1}{3}}}{Q} = 3Q^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial CMe}{\partial Q} = -2Q^{-\frac{5}{3}} < 0$$

Il costo medio è decrescente: **rendimenti di scala crescenti**.

3. $CT(Q) = 8Q^4$

$$CMe(Q) = \frac{8Q^4}{Q} = 8Q^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial CMe}{\partial Q} = 24Q^2 > 0$$

Il costo medio è crescente: **rendimenti di scala decrescenti**.

Massimizzazione del profitto nel breve periodo

Il **profitto** di un'impresa è la differenza tra i ricavi totali e i costi totali:

$$\pi = p \cdot Y - (wL + rK) = p \cdot Y - wL - rK$$

dove p è il prezzo dell'output, w il salario del lavoro e r il costo del capitale.

Poiché la quantità prodotta è vincolata dalla funzione di produzione $Y = f(L, K)$, il problema di massimizzazione del profitto si scrive:

$$\max_{K,L} \pi = p f(L, K) - wL - rK$$

Breve periodo. Nel breve periodo il capitale K è fisso; il problema si riduce quindi a un'ottimizzazione in un'unica variabile:

$$\max_L \pi = p f(L, \bar{K}) - wL - r\bar{K}$$

La condizione del primo ordine è:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = p \cdot \frac{\partial f}{\partial L} - w = 0 \quad \Rightarrow \quad p \cdot Pma_L = w$$

ovvero il valore del prodotto marginale del lavoro deve eguagliare il suo costo.

Esercizio 3 — Domanda di lavoro ottimale

Testo. Un'impresa opera con la seguente funzione di produzione Cobb–Douglas e con i parametri indicati. Ricavate la quantità ottimale di lavoro che massimizza il profitto nel breve periodo, nonché il livello di output e il profitto corrispondenti.

$$f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \quad p = 10, \quad \bar{K} = 100, \quad w = 5, \quad r = 5$$

Soluzione

Sostituiamo $\bar{K} = 100$ nella funzione di produzione:

$$f(L, 100) = L^{\frac{1}{2}} \cdot 100^{\frac{1}{2}} = 10 L^{\frac{1}{2}}$$

Il problema diventa:

$$\max_L \pi = 10 \cdot 10 L^{\frac{1}{2}} - 5L - 5 \cdot 100 = 100 L^{\frac{1}{2}} - 5L - 500$$

Condizione del primo ordine:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{100}{2 L^{\frac{1}{2}}} - 5 = \frac{50}{L^{\frac{1}{2}}} - 5 = 0$$

$$L^{\frac{1}{2}} = \frac{50}{5} = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L^* = 100}$$

Output ottimale:

$$Q^* = f(100, 100) = 100^{\frac{1}{2}} \cdot 100^{\frac{1}{2}} = 100$$

Profitto ottimale:

$$\pi^* = p Q^* - w L^* - r \bar{K} = 10 \cdot 100 - 5 \cdot 100 - 5 \cdot 100 = 1000 - 500 - 500 = \boxed{0}$$

Il profitto nullo indica che l'impresa copre esattamente tutti i propri costi (economici), situazione tipica di un mercato perfettamente concorrenziale nel lungo periodo.

Concorrenza perfetta nel breve e nel lungo periodo

In un mercato perfettamente concorrenziale ogni impresa è *price-taker*: accetta il prezzo p fissato dal mercato e sceglie il livello di produzione Q che massimizza il proprio profitto. Il problema, privo di vincoli espliciti, si imposta come segue:

$$\max_Q \pi = RT - CT = pQ - CT(Q)$$

Derivando rispetto a Q e uguagliando a zero:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = p - \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = p - C\text{Ma}(Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = C\text{Ma}(Q)}$$

La **condizione di ottimo nel breve periodo** richiede che il prezzo eguagli il costo marginale. Il profitto di breve periodo è quindi:

$$\pi_{BP} = p Q_{BP} - CT(Q_{BP})$$

Equilibrio di lungo periodo

Nel lungo periodo la libertà di entrata e di uscita dal mercato spinge il profitto economico a zero. Imponendo $\pi = 0$:

$$\pi = Q(p - CMe(Q)) = 0 \quad \implies \quad p = CMe(Q)$$

Combinando questa condizione con quella di breve periodo ($p = CMa$), si ricava che nel lungo periodo l'impresa produce in corrispondenza del **minimo del costo medio**:

$$\boxed{p = CMa(Q_{LP}) = CMe(Q_{LP}) = CMe_{\min}}$$

Esercizio 4 — Concorrenza perfetta: offerta e equilibrio di mercato

Testo. In un mercato caratterizzato da concorrenza perfetta sono attive 10 imprese identiche, ciascuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2$$

La domanda di mercato è descritta dalla funzione:

$$Q^d = 100 - 20p$$

Determinate:

1. La funzione di offerta di breve periodo della singola impresa.
2. La funzione di offerta aggregata dell'industria nel breve periodo.
3. Il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato.
4. Il livello di produzione individuale e il profitto realizzato da ciascuna impresa nel breve periodo.

Soluzione

Punto 1 — Offerta della singola impresa.

Applicando la condizione di ottimo $p = \text{CMa}(Q_i)$:

$$\text{CMa}(Q_i) = \frac{\partial CT}{\partial Q_i} = 2Q_i \quad \Rightarrow \quad p = 2Q_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_i^s = \frac{p}{2}}$$

Punto 2 — Offerta aggregata dell'industria.

Con $n = 10$ imprese identiche, l'offerta totale si ottiene sommando le offerte individuali:

$$Q^s = 10 \cdot \frac{p}{2} = \boxed{5p}$$

Punto 3 — Equilibrio di mercato.

Imponiamo l'uguaglianza tra domanda e offerta:

$$Q^d = Q^s \quad \Rightarrow \quad 100 - 20p = 5p \quad \Rightarrow \quad 25p = 100 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p^* = 4}$$

Sostituendo il prezzo nell'offerta aggregata:

$$Q^* = 5 \cdot 4 = \boxed{20}$$

L'equilibrio di mercato è dunque $\{Q^* = 20, p^* = 4\}$.

Punto 4 — Produzione e profitto della singola impresa.

Poiché le imprese sono identiche e il mercato è in concorrenza perfetta, ciascuna produce la stessa quota della quantità totale:

$$Q_i^* = \frac{Q^*}{n} = \frac{20}{10} = \boxed{2}$$

Il profitto individuale nel breve periodo è:

$$\pi_i = p^* \cdot Q_i^* - CT(Q_i^*) = 4 \cdot 2 - (2)^2 = 8 - 4 = \boxed{4}$$

Ogni impresa realizza un profitto positivo pari a 4. Nel lungo periodo, tale profitto attirerà nuove imprese nel mercato fino a quando il profitto non si annullerà.