

May 4, 2018

## Esercizi

### Esercizio 1

Calcolare il tasso interno di rendimento  $i^*$  del contratto finanziario:

$$x/t = \{ -45, -40, 100 \} / \{ 0, 1, 2 \}$$

essendo il tempo espresso in anni. Determinare, inoltre, importo  $\Delta x_1$  che bisogna sommare alla prima posta del flusso per avere il tasso interno di rendimento della nuova operazione finanziaria  $i^* = 12\%$ .

### Soluzione

Il tasso di rendimento  $i^*$  viene calcolato risolvendo impostando il seguente flusso di cassa:

$$\frac{-40}{1+i} + \frac{100}{(1+i)^2} = 45$$

Risolvere equazione di secondo grado in  $i$  per ottenere  $i^* = \frac{1}{9}$  o in termini percentuali 11.11%.

Per determinare l'importo  $\Delta x_1$  che bisogna aggiungere al precedente flusso di cassa si imposta il nuovo flusso di cassa con  $i = 12\%$

$$\frac{-40}{1+0.12} + \frac{100}{(1+0.12)^2} = 45 + \Delta x_1$$

risolvere rispetto a  $\Delta x_1$  per ottenere  $\Delta x_1 = -0.994898$ .

### Esercizio 2

Dovendo investire €80.000 per 4 anni, Sempronio chiede una consulenza alla propria banca. Le alternative proposte sono le seguenti:

1. investire per 4 anni l'intera somma al 2,8%
2. investire per il primo anno al 2 % annuo, per il secondo anno e il terzo anno al 3,1 % e per il quarto anno al 3,6%.

Determinare la migliore alternativa.

### Soluzione

Calcolare Montante delle 2 alternative

$$M_1 = 80.000 \times (1 + 0.028)^4 = 8934.34$$

$$M_2 = 80.000 \times (1 + 0.02)^1 \times (1 + 0.031)^2 \times (1 + 0.036)^1 = 8986.02$$

La seconda alternativa assicura montante superiore.

### Esercizio 3

Siano dati i seguenti progetti finanziari

t	0	1	2
C	-4000	X	1874,6

t	0	1	2
C	-4000	2100	2050

1. Determinare importo X tale che il progetto A abbia T.I.R.= 3 % (A il primo flusso di cassa e B il secondo).
2. Utilizzando il criterio del T.I.R. determinare il miglior progetto tra A e B.

### Soluzione

Per determinare X tale che il TIR sia 3% risolvere il seguente flusso di cassa

$$\frac{X}{(1 + 0.03)^1} + \frac{1847.6}{(1 + 0.03)^2} = 4000$$

Risolvere rispetto ad X per ottenere  $X = 2300$ . Per determinare quale progetto sia migliore possiamo

1. Calcolare TIR progetto B e confrontarlo con il TIR progetto A (da testo  $TIR_A = 3\%$ )

$$\frac{2100}{(1 + i)^1} + \frac{2050}{(1 + i)^2} = 4000$$

Risolvere rispetto i e trovare  $i = \frac{1}{40}$  o in termini percentuali  $TIR_B = 2.5\%$ . Dato  $TIR_A > TIR_B$  alternativa A preferibile.

1. In alternativa si noti che al 3 % il  $VAN_A = 0$ . Calcolare  $VAN_B(3\%)$  considerando  $i = 3\%$  come tasso

$$VAN_B(3\%) = \frac{2100}{(1 + 0.03)^1} + \frac{2050}{(1 + 0.03)^2} - 4000 = -28.8434$$

$VAN_A(3\%) > VAN_B(3\%)$  alternativa A sempre preferita. Si noti che per  $i > TIR$  il VAN é negativo.

Il principio di scelta del TIR per cui  $TIR_A > TIR_B$ , A é preferibile vale nel caso di investimento (vedasi esercizio 7 nel caso di finanziamento).

### Esercizio 4

Considerare il flusso di cassa

$$x/t = \{-100, 5, x, 115\} / \{0, 2, 4, 5\}$$

dove il tempo misurato in mesi.

- Per quale valore di  $x$  il VAN del flusso é zero, rispetto al tasso annuo nominale  $r = 12\%$  e regime di capitalizzazione mensile?
- Quale valore deve avere  $x$  per avere TIR uguale a  $12\%$  annuo?
- Quale valore deve avere  $x$  per avere TIR effettivo annuo equivalente al  $12\%$  annuo nominale con capitalizzazione mensile?
- Calcolando il VAN del flusso rispetto a un tasso  $r$  maggiore del TIR si troverebbe un valore maggiore o minore di zero? (Rispondere senza eseguire i calcoli).

### Soluzione

- Per calcolare  $x$  tale che il Van sia zero con  $r = 12\%$  e regime di capitalizzazione mensile risolvere

$$\frac{-100}{(1+0.01)^0} + \frac{5}{(1+0.01)^2} + \frac{x}{(1+0.01)^4} + \frac{115}{(1+0.01)^5} = 0$$

per trovare  $x = -14.9015$ .

- Trovare  $x$  tale che il TIR annuale sia  $12\%$   
Poiché viene richiesto un tasso di interesse annuale però il nostro  $t$  é espresso in mesi avete due opzioni:
- Considerare un  $i$  annuo nominale e frazionare il tempo

$$\frac{-100}{(1+0.12)^0} + \frac{5}{(1+0.12)^{\frac{2}{12}}} + \frac{x}{(1+0.12)^{\frac{4}{12}}} + \frac{115}{(1+0.12)^{\frac{5}{12}}} = 0$$

Risolvere rispetto a  $x$  per trovare  $x = -15.1645$ .

L'altro approccio che per la definizione di TIR potete seguire é che il TIR deve essere coerente con la struttura di  $t$ , ossia noi dobbiamo ricavare il tasso mensile equivalente a un  $12\%$  annuo con scadenze mensili. Definiamo  $r$  questo tasso mensile e impostiamo la seguente equazione:

$$(1+r) = (1+0.12)^{\frac{1}{12}}$$

Risolvere rispetto a  $r$  per trovare  $r = 0.00948879$  che rappresenta il tasso mensile equivalente al tasso nominale annuo di  $12\%$  con scadenze mensili. L'esigenza di usare questa formula si presenta quando per qualsiasi motivo, vi sia chiesto di esprimere il TIR con una frequenza differente dalla

frequenza del flusso di cassa  $t$ .

Risolvendo il flusso di cassa rispetto a  $r$  così determinato abbiamo:

$$\frac{-100}{(1 + 0.00948879)^0} + \frac{5}{(1 + 0.00948879)^2} + \frac{x}{(1 + 0.00948879)^4} + \frac{115}{(1 + 0.00948879)^5} = 0$$

Risolvere rispetto  $x$  per avere  $X = -15.4157$

- Considerando un tasso annuo effettivo, trovare  $x$  che assicuri l'equivalenza al 12% nominale con capitalizzazione composta.

$$1 + i_e = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12} \implies i_e = 0.126825$$

- Determinare  $X$  considerando  $i_e = 0.126825$  con tempo frazionato

$$\frac{-100}{(1 + 0.126825)^0} + \frac{5}{(1 + 0.126825)^{\frac{2}{12}}} + \frac{x}{(1 + 0.126825)^{\frac{4}{12}}} + \frac{115}{(1 + 0.126825)^{\frac{5}{12}}} = 0$$

Risolvere rispetto a  $X$  per trovare  $X = -14.901$

- Se  $r > TIR \implies VAN < 0$

### Nota

Potete usare entrambi i metodi nel caso di tassi e scadenze differenti.

## Esercizio 5

Si consideri il flusso di cassa

$$x/t = \{-10, 0.5, 15\} / \{0, 6, 12\}$$

con  $t$  misurato in mesi. Calcolare TIR con capitalizzazione semestrale e TIR annuale

- Semestrale: impostare flusso di cassa, da risolvere rispetto ad  $i$

$$\frac{-10}{(1 + i)^0} + \frac{0.5}{(1 + \frac{i}{2})^1} + \frac{15}{(1 + \frac{i}{2})^2} = 0$$

$i = 0.5$  o in termini percentuali 5%

- annuale

$$\frac{-10}{(1 + i)^0} + \frac{0.5}{(1 + i)^{0.5}} + \frac{15}{1 + i} = 0$$

$i = 0.5625$  o in termini percentuali  $i = 5.6225\%$

### Esercizio 6

Un debito di D euro deve essere ammortizzato in n rate mensili al tasso annuo nominale  $i$ . Calcolare l'ammontare della rata considerando un regime degli interessi composti con capitalizzazione mensile degli interessi.  
(D = 1000, n = 15, i = 10 %).

### Soluzione

Ricordare formula delle rendite con P valore attuale, A ammontare rate

$$P = \frac{A}{r} \left[ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

Applicare la stessa formula esplicitata rispetto ad A

$$A = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} P$$

Sostituendo i dati in questo caso abbiamo

$$A = \frac{\frac{0.10}{12} \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{15}}{\left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{15} - 1} 1000 \implies A = 71.1972$$

### Esercizio 7

Consideriamo le due seguenti operazioni di finanziamento: A: si riceve un prestito di €800 al tempo iniziale e lo si rimborsa in 2 rate distinte, la prima che ammonta a €600 euro dopo un anno, e la seconda di €500 euro dopo 2 anni. B: si ricevono in prestito inizialmente €700 euro, che vengono rimborsati in 3 rate, una di €300 alla fine del primo anno, una di €300 euro alla fine del secondo e una di €1.000 alla fine del terzo. Stabilire col criterio del TIR quale dei due finanziamenti sia migliore.

### Soluzione

Determinare i impostando flusso di cassa finanziamento A

$$800 = \frac{-600}{(1+i)^1} + \frac{-500}{(1+i)^2}$$

per avere  $i_A = \frac{1}{4}$  o 25 %

$$700 = \frac{-300}{(1+i)^1} + \frac{-300}{(1+i)^2} + \frac{-1000}{(1+i)^3}$$

Risolvere per ottenere  $i_B = 3/7$  o 42.8517 %

Risolvere flusso di cassa in i progetto B implica risolvere equazione di terzo grado, le altre due radici sono negative con parti immaginarie. Modo semplice.

Sapendo che il  $TIR_A = 0.25$  calcolare  $VAN_B$  con il tasso  $r = 0.25$  ottenendo  $VAN_B = -244$ .

Dato  $VAN_B < VAN_A$  per  $r = 0.25$ . Scelgo alternativa A di progetto.

Nota che nelle operazioni di finanziamento il segno del TIR e del VAN risultano invertiti rispetto alle operazioni di investimento. Quindi scegliamo il progetto con il TIR e il VAN inferiore.

## Esercizio 8

Il signor R chiede alla banca N un mutuo di €150000 da rimborsare con rate costanti mensili al tasso effettivo annuo  $i$ . Il signor R non può permettersi di pagare una rata superiore a €1000. Determinare il numero di anni minimo di durata del mutuo? Dopo aver individuato il numero di anni del mutuo, ricalcolare la rata. Dati:  $i = 4\%$ .

## Soluzione

- Calcolare  $n$  durata mutuo in termini annuali con  $A = 1000$  dato.  
Calcolare tasso nominale con capitalizzazione mensile da

$$(1 + 0.04) = \left(1 + \frac{i_{12}}{12}\right)^{12}$$

$i_{12} = 0.0392849 \simeq 0.04$  Impostare formula per trovare  $n$

$$150000 = \frac{1000}{\frac{0.04}{12}} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^n}\right]$$

si ottiene  $n = 208.291$  che l'ammontare di mesi per come abbiamo impostato il problema. Per ricavare  $n$  in termini di anni  $\frac{208.291}{12} = 17.3575 \simeq 18$  anni.

- Calcolare ammontare rata effettiva con  $n = 18$

$$150000 = \frac{X}{\frac{0.04}{12}} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^{216}}\right]$$

Per ottenere  $X = 975.297$

Nel caso non voleste approssimare  $i_{12}$  il valore  $n = 206.654$  che in termini annuali è pari a 17.2212

## Nota

L'approssimazione a  $n = 18$  anni di durata del mutuo potrebbe sembrare totalmente arbitraria. Provate a vedere che cosa succede approssimando  $n = 17$ .

## Esercizi di pratica

- Tramite versamenti mensili posticipati e costanti in un fondo che si capitalizza al tasso annuo del 14 % in un regime di interesse composto, si vuole arrivare ad accumulare, dopo 8 anni, una somma di 15.000 €. Determinare ammontare del versamento necessario (somma versamenti totali). Soluzione [ 8570, 93 €]
- Si consideri un finanziamento concesso da una banca per un ammontare di 5000, contro pagamento di quattro rate semestrali posticipate al tasso semestrale del 4%. Le prime tre quote di capitale sono:  $C_1 = 1000$ ;  $C_2 = 1500$ ;  $C_3 = 1200$ .  
(a) Ricavare ultima quota di capitale. (b) Determinare i debiti residui del finanziamento. (c) Costruire il piano ammortamento  
Soluzione (a)  $C_4 = 1300$ ; (b)  $D_0 = 5000$ ;  $D_1 = 4000$ ;  $D_2 = 2500$ ;  $D_3 = 1300$ ; (c)  $R_1 = 1200$ ;  $R_2 = 1660$ ;  $R_3 = 1300$ ;  $R_4 = 1352$