Esercizio 1

Si consideri un bond con scadenza a 30 anni e con tasso effettivo annuale = 10%. Si assuma che sia quotato alla pari. Si calcoli la duration.

Soluzione

La duration di uno zcb é pari alla sua vita residua e non dipende (se non eccezionalmente nel caso della duration quasi modificata) dal tasso di valutazione i (i titoli a duration piú elevata sono gli zcb). Per vedere perché si consideri la formula di duration come media aritmetica:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \left[1 + i(0, t_k)\right]^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \left[1 + i(0, t_k)\right]^{-t_k}} \tag{1}$$

Nel nostro caso fino a $\sum_{k=1}^{29} x_k = 0$ (non essendoci cedole), quindi l'unico flusso positivo é il valore di rimborso a maturitá (assumi sia di 100). La formula si riduce a

$$D = \frac{30 \times 100\,(1 + 0.10)^{-30}}{100\,(1 + 0.10)^{-30}} \implies D = 30 \tag{2}$$

Non solo la duration di uno ZCB é pari alla sua scadenza, ma soprattutto non dipende assolutamente dal tasso di interesse.
Per un titolo con cedole la Duration é inferiore alla vita residua e tanto piú piccola quanto maggiore é il peso delle cedole rispetto al valore di rimborso. Provate a considerare lo stesso esempio con cedole di 5, 10 e 20 rispettivamente

Duration	$i = 0.10$	x_t	$t_n = 30$
30	$i = 0.10$	0	$t_n = 30$
11.4336	$i = 0.10$	5	$t_n = 30$
10.3696	$i = 0.10$	10	$t_n = 30$
9.79052	$i = 0.10$	20	$t_n = 30$

Se il tasso cresce, il valore attuale diminuisce e anche i pesi, di conseguenza anche la duration. Si consideri la struttura cedolare dell' esempio precedente con $i = 20\%$

Duration	$i = 0.20$	x_t	$t_n = 30$
30	$i = 0.20$	0	$t_n = 30$
6.27457	$i = 0.20$	5	$t_n = 30$
6.07551	$i = 0.20$	10	$t_n = 30$
5.97472	$i = 0.20$	20	$t_n = 30$

Esercizio 2

Un titolo paga $c_1 = c_2 = 70$ tra 1 e 2 anni rispettivamente e poi $c_3 = 1070$ tra tre anni. Il tasso di mercato corrente é i = 7 %.

- Calcolare il prezzo corrente P del titolo.

- Calcolare la duration D del titolo.
- Stimare attraverso D la variazione assoluta P del prezzo corrente indotta da una variazione $\Delta i = 1$ % del tasso di mercato.

Soluzione

- Calcolare il prezzo del titolo

$$P = \frac{70}{(1+0.07)^1} + \frac{70}{(1+0.07)^2} + \frac{1070}{(1+0.07)^3} \implies P = 1000$$

- Calcolare Duration

$$D(0;3) = \frac{1\frac{70}{(1+0.07)^1} + 2\frac{70}{(1+0.07)^2} + 3\frac{1070}{(1+0.07)^3}}{1000} \implies D(0;3) = 2.80802$$

- Usare duration modificata per capire come varia il prezzo al variare di i

$$\Delta P = -D_M \times P \times \Delta\lambda = \frac{-2.80802}{1+0.07} \times 1000 \times 0.01 \implies \Delta P = -26.243$$

Esercizio 3

Determinare prezzo e duration all'emissione di un'obbligazione a 10 anni con cedola 8 % e scambiata al tasso 10%

Soluzione

Supponiamo cedola annuale e valore nominale 100. La cedola $C = 100 \times 8\%$ e $\lambda = 10\%$. Calcolare prezzo

$$P = \sum_{k=1}^{10} C_k (1+\lambda)^{-k} + F(1+\lambda)^{-n}$$

con $F = 100$ valore di rimborso, $n = 10$ tempo di maturity, $C_k = 8$ ammontare della cedola, uguale per tutti i periodi k. Sostituendo i valori avremo semplicemente $P = 87.71$. Per calcolare la duration classica (media dei flussi di cassa) abbiamo due possibilitá

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \left[1 + i(0,t_k)\right]^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} x_k \left[1 + i(0,t_k)\right]^{-t_k}} \tag{3}$$

La formula come duration aritmetica oppure la formula esplicita della duration di Macaulay **(da usare solo quando le cedole sono uguali tra di loro)**

$$D = \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc\left[(1+y)^n - 1\right] + my}$$

con $y = \frac{\lambda}{m}$, $c = \frac{tassocedolareannuo}{m}$, n=numero pagamenti residui , m=frequenza di ponderazione (semestrale, quadrimestrale, mensile, etc)
Nel nostro caso abbiamo $m = 1$ $c = \frac{8}{100} = 0.08$, $y = 0.1$, $n = 10$, quindi la formula diventa

$$D = \frac{1+0.1}{0.1} - \frac{1+0.1+10\,(0.08-0.1)}{0.08\left[(1+0.1)^{10} - 1\right] + 0.1} \implies D = 7.04395$$

Esercizio 4

Si deve ripagare un debito di 10000 euro all'epoca $T = 1$ anno. Determinare il portafoglio immunizzante del debito, costituito da x quote di un BOT con vita a scadenza $T_1 = 6$ mesi e y quote di un CTZ con scadenza in $T_2 = 2$ anni. Assumere che il tasso annuo effettivo sia pari al 4 %. Il taglio minimo di acquisto sia per BOT che per CTZ é $N = 1000$

Soluzione

Per prima cosa consideriamo una serie di uscite non nulle:

$$(u_1, u_2, ..u_k..u_n)/(t_1, t_2, ..t_k..t_n)$$

.
Consideriamo anche un portafoglio di entrate:

$$(\theta_1, \theta_2, ..\theta_k....\theta_n)/(t_1, t_2, ..t_k..t_n)$$

.
Affinché un portafoglio sia immunizato le seguenti condizioni devono valere:

$$\begin{cases} V(0,\theta) = V(0,u) \\ D(0,\theta) = D(0,u) \\ D^2(0,\theta) = D^2(0,u) \end{cases}$$

dove la prima equazione rappresenta il fatto che il valore attuale delle entrate deve essere uguale al valore attuale delle uscite e la seconda equazione rappresenta il fatto che la duration delle entrate deve essere uguale alla duration delle uscite e la terza equazione é il vincolo di dispersione.
Quando l' uscita prevista é unica, come in questo caso, per il teorema di Fisher-Weil, un portafoglio é immunizzato se rispetta solo il vincolo di bilancio e il vincolo di duration.

Imposteremo come segue il problema: in questo caso dobbiamo trovare x e y tale per cui le due condizioni sopra scritte siano rispettate

$$\begin{cases} x\frac{1000}{(1+0.04)^{0.5}} + y\frac{1000}{(1+0.04)^2} = \frac{10000}{1+0.04} \\ \frac{\frac{1}{2}x\frac{1000}{(1+0.04)^{0.5}} + 2y\frac{1000}{(1+0.04)^2}}{\frac{10000}{1+0.04}} = 1 \end{cases}$$

Da notare due cose: il denominatore del vincolo di duaration viene scritto in questo modo poiché dalla prima equazione si vede che la condizione di $x\frac{1000}{(1+0.04)^{0.5}} + y\frac{1000}{(1+0.04)^2} = \frac{10000}{1+0.04}$ deve valere (si ricordi il denominatore della formula di duration é il VA). Altra cosa da notare é che la duration dell' uscita é pari al tempo di uscita del pagamento (nel caso di un'unica uscita uniperiodale). Per vedere perché si sciva esplicitamente la duration di $D(0; u)$

$$D(0; u) = \frac{1 \times (-10000)(1 + 0.04)^{-1}}{(-10000)(1 + 0.04)^{-1}}$$

La duration dell' unica uscita uniperiodale sará sempre uguale al tempo in cui si realizza l'uscita .
Risolvere il sistema per trovare x e y, che nel nostro caso saranno pari a $x = 6.5372$, $y = 3.46667$

Esercizio 5

Calcolare le quote dei titoli z_1 e z_2 che immunizzano un portafoglio composto da un'uscita $L = 500$ che si verifica in $t = 2$ essendo z_1 e z_2 i seguenti: $z_1 = (-95; 100)/(0; 1)$ $z_2 = (-96; 110)/(0; 3)$ ed essendo il tasso di mercato costante e pari al 5 %. Partendo dai prezzi dei due titoli calcolare anche il costo del portafoglio di attivitá.

Soluzione

Si imposti il sistema per trovare quote di x e y per immunizzare il portafoglio:

$$\begin{cases} x100(1 + 0.05)^{-1} + y110(1 + 0.05)^{-3} = 500(1 + 0.05)^{-2} \\ \frac{x100(1+0.05)^{-1}+3y110(1+0.05)^{-3}}{500(1+0.05)^{-2}} = 2 \end{cases}$$

Risolvere per trovare $x = 2.38095$, $y = 2.38636$ Per cacolare il costo del portafoglio C occore semplicemente considerare le quote $x \times P_{Z1} + y \times P_{Z2}$

$$C = 2.38095 \times 95 + 2.38636 \times 96 \implies C = 455, 2814$$

Esercizio 6

Considerare un portafoglio composto da q_1 quote di un BTP con prezzo $P_1 = 101.3$ e duration $D_1 = 2.4$ e q_2 quote di un BTP con prezzo

$P_2 = 104.2$ e duration $D_2 = 4.5$.

Il tasso di rendimento di mercato é 7 %. Calcolare D la duration del portafoglio e approssimare il nuovo valore del portafoglio se il tasso di rendimento diventa 8 %. (Dati: $q_1 = 50, q_2 = 100$)

Soluzione

Per calcolare la duration del portafoglio abbiamo bisogno di calcolare prezzo portafoglio (valore attuale) e i pesi dei singoli titoli nel portafoglio

$$P_{portafoglio} = q_1 P_1 + q_2 P_2 = 50 \times 101.30 + 100 \times 104.2 \implies P_{portafoglio} = 15485$$

Calcoliamo i pesi dei due asset secondo la formula $w_i = \frac{q_i P_i}{P_{portafoglio}}$. Quindi abbiamo

$$w_1 = \frac{50 \times 101.3}{15485} \implies w_1 = 0.3270$$

$$w_1 = \frac{100 \times 104.2)}{15485} \implies w_2 = 0.6729$$

La duration del portafoglio é semplicemente la media pesata delle duration dei due asset:

$$D_{port} = w_1 D_1 + w_2 D_2 = 0.3270 \times 2.4 + 0.6729 \times 4.5 \implies D_{port} = 3.81311$$

Per calcolare variazioni portafoglio in corrispondenza variazioni tasso di interesse calcoliamo la duration modificata,

$$D_M = D \times \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{-1}$$

Nel nostro caso la duration modifcata sará

$$D_M = 3.81311 \times (1 + 0.07)^{-1} = 3.56365$$

Usando approssimazione che $\frac{\partial P}{\partial \lambda} \approx \frac{\Delta P}{\Delta \lambda}$ la formula per calcolare variazione di prezzo rispetto alla variazione di interesse

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = -D_M P$$

Nel nostro caso

$$\Delta P = -D_M \times P \times \Delta\lambda = -3.56365 \times 15485 \times 0.01 \implies \Delta P = -551,832$$

IL nuovo prezzo sará dato da

$$P_{nuovo} = 15485 - 551,832 = 14993,20$$

Esercizio 7

In un certo momento il mercato é formato da tre ZCB

$z_1 = \{\ 100\ ,\ 120\ \}\ /\ \{\ 0,\ 1\ \}$

$z_2 = \{\ 100\ ,\ 130\ \}\ /\ \{\ 0,\ 2\ \}$

$z_3 = \{\ 100\ ,\ 145\ \}\ /\ \{\ 0,\ 3\ \}$

Ricavare, da queste informazioni, la struttura dei tassi esplicitando sia i tassi a pronti che i tassi a termine.

Soluzione

Le formule principali per ottenere i tassi a pronti sono le seguenti

$$m(t_0, t_n) = (1 + i_{t_0,t_n})^{(t_n - t_0)}$$

$$v(t_0, t_n) = (1 + i_{t_0,t_n})^{-(t_n - t_0)}$$

Dove $m(t_0, t_n) = \frac{x_n}{x_0}$ é il fattore di montante calcolato a partire da uno ZCB e $v(t_0, t_n) = \frac{x_0}{x_n}$ é il fattore di sconto dello ZCB.
Il primo passo calcolare i fattori di montante corrispondenti(o i fattori di sconto) associati ai ZCB:

$$z_1 \implies m(0;1) = \frac{120}{100} = 1,2$$

$$z_2 \implies m(0;2) = \frac{130}{100} = 1,3$$

$$z_3 \implies m(0;3) = \frac{145}{100} = 1,45$$

Tassi a pronti:

$$i(0;1) = m(0;1) - 1 = 1,2 - 1 = 0.20$$

$$i(0;2) = m(0;2)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,3^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.14017$$

$$i(0;3) = m(0;3)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1,45^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.13185$$

Da notare che la curva dei tassi a pronti é descrescente, semplicemente a fine di esempio. La curva dei tassi a pronti, nella realtá é crescente.
Formule principali per tassi a termine

$$i(t_0; t_h; t_n) = [m(t_0; t_h; t_n)]^{\frac{1}{(t_n - t_h)}} - 1 = [v(t_0; t_h; t_n)]^{\frac{1}{-(t_n - t_h)}} - 1$$

con

$$m(t_0; t_h; t_n) = \frac{m(t_0; t_n)}{m(t_0; t_h)}$$

o in alternativa

$$v(t_0;t_h;t_n) = \frac{v(t_0;t_n)}{v(t_0;t_h)}$$

Procediamo ora nel nostro caso a calcolare tassi a pronti:

$$i(0;1;2) = \frac{m(0;2)}{m(0;1)} - 1 = \frac{1.3}{1.2} - 1 = 0.0833$$

$$i(0;1;3) = \left(\frac{m(0;3)}{m(0;1)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{1.45}{1.2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.09924$$

$$i(0;2;3) = \frac{m(0;3)}{m(0;2)} - 1 = \frac{1.45}{1.3} - 1 = 0.11538$$

Esercizio 8

Siano i titoli descritti dagli scadenzari seguenti:

$b_1 = \{\ 0.828\ ,\ 1\ \}\ /\ \{\ 0,\ 3\ \}$

$b_2 = \{\ 0,\ 0.85\ ,\ 1\ \}\ /\ \{\ 0,\ 1,\ 3\ \}$

$b_3 = \{\ 0.96\ ,\ 1\ \}\ /\ \{\ 0,\ 1\ \}$

Appurare se in base a queste operazioni é verificata la relazione di coerenza, qualora cos non fosse, porre in essere una strategia d'arbitraggio

Soluzione

Se la relazione di coerenza é rispettata, nel mercato non ci sono possibilitá di arbitraggio ossia se é verificata allora

$$v(t_0;t_n) = v(t_0;t_h)v(t_0;t_h;t_n)$$

é verificata allora no **No arbitraggio**
Vediamo se la relazione vale in questo caso:

$$v(0;3) = v(0;1)v(0;1;3) \implies 0.828 > 0,816$$

Dove $0,816 = 0.96 \times 0.85$. Siccome non vale la relazione di coerenza allora posso fare arbitraggio: vendere il piú costoso e comprare quello meno costoso. Vendo allo scoperto b_1 e compro quello composto da b_2 e da b_3.
Vendo una unitá di b_1 che costa 0,828 e paga 1 in 3: all' epoca 0 avró quindi un introito: +0,828; all'epoca 3 un'uscita pari a 1.

Acquisto un' unitá di b_2 che costa 0,85 in 1 e rimborsa 1 in 3, all'epoca 0 non succede nulla, all'epoca 1 avró un'uscita: 0,85 e all'epoca 3 un'entrata pari

al rimborso: $+1$.
Del titolo b_3 acquisto una quota pari a $0,85 \times 0,96 = 0,816$; all'epoca 0 avró un'uscita dovuta all' acquisto della quota di b3 : 0,816 e all'epoca 1 il rimborso che sará pari 0,85. All'epoca 0 avró cosí un saldo positivo pari a $0,828 - 0,816 = 0,012$.

t	0	1	3
v(0;1)	0,816	+ 0,85	0
v(0;1;3)	0	-0,85	1
v(0;3)	+0,828	0	-1