

# Esercitazione di Matematica Finanziaria

## Corso di laurea in Economia e Management

09 Maggio 2019

**Esercizio 1.** Si consideri un mercato in cui sono quotati i seguenti titoli:

- uno ZCB  $x$  con valore nominale pari a € 100, scadenza tra un anno e prezzo di emissione di € 95;
- uno ZCB  $y$  con valore nominale pari a € 100, con scadenza tra due anni e prezzo di emissione di € 91;
- uno ZCB  $z$  con valore nominale pari a € 50, con scadenza tra tre anni e prezzo di emissione di € 44;

Determinare l'intera struttura dei tassi spot e dei tassi forward indicando quali sono i tassi short.

*Soluzione.* Dai titoli quotati sul mercato si ricava la struttura dei fattori sconti:

$$d_1 = \frac{95}{100} = 0.95, \quad d_2 = \frac{91}{100} = 0.91, \quad d_3 = \frac{44}{50} = 0.88.$$

Ricordando la seguente relazione che lega i fattori di sconto e i tassi a pronti i legge di capitalizzazione composta

$$d_t = (1 + s_t)^{-t} \iff s_t = \left( \frac{1}{d_t} \right)^{\frac{1}{t}} - 1,$$

si ha che la struttura dei tassi spot sono:

$$s_1 = 0.05263, \quad s_2 = 0.048285, \quad s_3 = 0.043532.$$

La struttura dei tassi forward, invece, si calcola ricordando che

$$f_{t_1, t_2} = \left( \frac{(1 + s_{t_2})^{t_2}}{(1 + s_{t_1})^{t_1}} \right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1;$$

da cui si ottiene che

$$f_{1,2} = 0.0439, \quad f_{1,3} = 0.039, \quad f_{2,3} = 0.0341.$$

I tassi short, cioè i tassi a breve termine, sono  $s_1$ ,  $f_{1,2}$  e  $f_{2,3}$ .

**Esercizio 2.** Si consideri un mercato a capitalizzazione continua in cui sono presenti i seguenti titoli:

- un BOT con scadenza tra un anno, valore facciale di € 2000 e prezzo corrente di € 1970;
- un BTP con scadenza tra due anni, valore facciale di € 1000, cedola annuale al tasso cedolare del 6% e prezzo corrente di € 1020;

- un BTP con scadenza tra tre anni, valore facciale di € 5000, cedola annuale al tasso cedolare del 8% e prezzo corrente di € 4196.

Determinare la struttura per scadenza dei tassi spot e dei tassi forward.

*Soluzione.* Al tempo  $t = 0$ , sono quotati sul mercato tre titoli obbligazionari, caratterizzati dai flussi:

$$\begin{aligned}\text{titolo 1: } & (2000)|(1), \\ \text{titolo 2: } & (60, 1060)|(1, 2), \\ \text{titolo 3: } & (400, 400, 5400)|(1, 2, 3),\end{aligned}$$

con scadenziario espresso in anni ai prezzi:

$$P_1 = 1970\text{€} \quad P_2 = 1020\text{€} \quad P_3 = 4196\text{€}.$$

Lo scadenziario comune è  $\mathbf{t} = (1, 2, 3)$  e i flussi dei tre titoli, ridefiniti su  $\mathbf{t}$ , sono:

$$x_1 = (2000, 0, 0), \quad x_2 = (60, 1060, 0), \quad x_3 = (400, 400, 5400),$$

da cui si può costruire la matrice dei flussi  $X$ :

$$X = \begin{pmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 60 & 1060 & 0 \\ 400 & 400 & 5400 \end{pmatrix}.$$

Per determinare i fattori di sconto  $d = (d_1, d_2, d_3)$  (dove  $d_t := e^{-s_t \cdot t}$ ), si risolve il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 60 & 1060 & 0 \\ 400 & 400 & 5400 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1970 \\ 1020 \\ 4196 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\det(X) = 2000 \cdot 1060 \cdot 5400 \neq 0 \iff \text{rank}(X) = 3,$$

il sistema è compatibile ed ammette una unica soluzione data da

$$d_1 = 0.985, \quad d_2 = 0.9065, \quad d_3 = 0.6369.$$

La struttura dei tassi a pronti si ricava dalla relazione:

$$s_t = -\frac{\ln(d_t)}{t};$$

quindi

$$s_1 = 0.015 = 1.5\%, \quad s_2 = 0.049 = 4.9\%, \quad s_3 = 0.1504 = 15.04\%.$$

La struttura dei tassi forward, in regime di capitalizzazione continua, viene calcolata usando la seguente formula

$$f_{t_1, t_2} = \frac{s_{t_2} t_2 - s_{t_1} t_1}{t_2 - t_1}, \quad \text{con } t_2 > t_1. \quad (1)$$

Nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned}f_{1,2} &= \frac{s_2 \cdot 2 - s_1}{2 - 1} = 0.083 = 8.3\%, \\ f_{1,3} &= \frac{s_3 \cdot 3 - s_1}{3 - 1} = 0.2181 = 21.81\%, \\ f_{2,3} &= \frac{s_3 \cdot 3 - s_2 \cdot 2}{3 - 2} = 0.3532 = 35.32\%.\end{aligned}$$

**Esercizio 3** (Esercizio per casa). Si consideri un mercato in cui, al tempo 0, sono quotati i seguenti tre titoli (tutti riferiti a un facciale  $C = 100$  €):

- Un ZCB a pronti, con scadenza 3 anni, e prezzo  $P = 90$  €;
- Un ZCB a termine, con scadenza 3 anni, da pagare al tempo 2 anni e prezzo  $P = 94$  €;
- Un BTP a pronti, con scadenza 3 anni, cedola annuale, tasso cedolare del 3.55% e quotato alla pari.

Si calcoli in questo mercato il valore iniziale di una rendita posticipata di durata  $m = 3$  rate annuali, tutte pari a  $R = 600$  ed il prezzo di non arbitraggio di un BTP con valore facciale  $F = 100$  €, di durata 3 anni e tasso cedolare del 7%.

**Esercizio 4** (Esercizio per casa). Si supponga che sul mercato siano presenti i seguenti titoli:

- un'obbligazione  $x$  con valore nominale di € 100, scadenza tra 3 anni e cedole annuali al tasso del 12%;
- uno ZCB  $y$  con valore nominale di € 100 e scadenza tra 1 anno.

Data la struttura per scadenza dei tassi spot

$$s_1 = 2.75\%, \quad s_2 = 3.23\%, \quad s_3 = 5.78\%,$$

costruire un portafoglio dei titoli disponibili in modo tale che si riesca a immunizzare un'uscita di € 1500 tra 2 anni.

**Esercizio 5** (Esercizio per casa). Si consideri un mercato dove sono presenti i seguenti titoli:

- uno ZCB  $x$  con scadenza tra un semestre, valore facciale di € 100 e prezzo corrente di € 97.83;
- un'obbligazione  $y$  con scadenza tra un anno, valore facciale € 100, cedola semestrale al tasso cedolare annuo del 4% e prezzo corrente di € 98.45;
- un'obbligazione  $z$  con scadenza tra un anno e mezzo, valore facciale € 100, cedola semestrale al tasso cedolare annuo del 10% e prezzo corrente di € 104.08;
- un'obbligazione  $w$  con scadenza tra un anno e mezzo, valore facciale € 100 e che garantisce una cedola  $C_1$  tra un semestre e due cedole  $C_2$ , rispettivamente tra due e tre semestri.

Determinare le quantità  $C_1$  e  $C_2$  in modo tale che l'obbligazione  $w$  abbia prezzo di non arbitraggio pari a € 102.23 e duration pari a 1.43 anni.

**Esercizio 6** (Esercizio per casa). Si consideri la seguente struttura dei tassi spot

$$s_1 = 4.50\%, \quad s_2 = 4.75\%, \quad s_3 = 6.5\%, \quad s_4 = 7.1\%.$$

Nell'ipotesi in cui la capitalizzazione avvenga in regime continuo, si determini il prezzo e la duration di Fisher-Weil di un titolo obbligazionario a cedola annuale fissa con durata 4 anni, tasso cedolare annuo 8% e valore nominale di € 100.