

Esercitazione di Matematica Finanziaria

Corso di laurea in Economia e Management

02 Maggio 2019

Esercizio 1. Calcolare, secondo lo schema dell'ammortamento americano, il piano d'ammortamento completo di un prestito di 50 000 € rimborsabile in 5 anni ad un tasso di debito del 5% effettivo annuo ed essendo il tasso di accumulazione pari al 4% effettivo annuo.

Soluzione. L'ammortamento a due tassi si costruisce essenzialmente su due ipotesi:

- (i) dalla prima alla $(n - 1)$ -esima scadenza il debitore rimborsa soltanto la quota interessi $C \cdot i$ secondo un tasso di remunerazione i , mentre alla scadenza del prestito restituisce oltre agli interessi l'intera somma prestata: $C(1 + i)$;
- (ii) contemporaneamente, il debitore versa anche, ad un altro soggetto, una rata ad ogni periodo, accumulando del denaro che, capitalizzato ad un tasso di accumulazione j , in generale diverso da i , genera la somma C da restituire alla scadenza del prestito.

Quindi, ogni rata totale versata dal debitore ammonta a:

$$R = \left(i + \frac{j}{(1 + j)^n - 1} \right) C.$$

Detto questo il piano è riportato nella seguente tabella:

| N. rata | Quota capitale | Quota interesse | Rata | Debito residuo | Quota Acc. |
|---------|----------------|-----------------|--------|----------------|------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 50 000 | 0 |
| 1 | 0 | 2 500 | 2 500 | 50 000 | 9 231,36 |
| 2 | 0 | 2 500 | 2 500 | 50 000 | 9 231,36 |
| 3 | 0 | 2 500 | 2 500 | 50 000 | 9 231,36 |
| 4 | 0 | 2 500 | 2 500 | 50 000 | 9 231,36 |
| 5 | 50 000 | 2 500 | 52 500 | 0 | 9 231,36 |

Esercizio 2. Calcolare, secondo gli schemi dell'ammortamento francese, italiano e tedesco, il piano d'ammortamento completo di un prestito di 6 000 € rimborsabile in 5 anni ad un tasso di debito del 2.5% effettivo annuo.

Soluzione. (i) Nell'ammortamento francese, la rata è costante e viene calcolata con l'usuale formula:

$$R = \frac{D_0 \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{6\,000 \cdot 2.5\%}{1 - (1.025)^{-5}} = 1291,48.$$

Ogni riga del piano viene compilata utilizzando le seguenti formule:

$$I_k = D_{k-1} \cdot i, \quad C_k = R - I_k, \quad D_k = D_{k-1} - C_k.$$

Il piano è riportato nella seguente tabella:

| N. rata | Quota capitale | Quota interesse | Rata | Debito residuo |
|---------|----------------|-----------------|---------|----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 6000 |
| 1 | 1141,48 | 150,00 | 1291,48 | 4858,52 |
| 2 | 1170,02 | 121,46 | 1291,48 | 3688,50 |
| 3 | 1199,27 | 92,21 | 1291,48 | 2489,23 |
| 4 | 1229,25 | 62,23 | 1291,48 | 1259,98 |
| 5 | 1259,98 | 31,50 | 1291,48 | 0 |

- (ii) Nell'ammortamento italiano, la quota capitale è costante e viene calcolata con l'usuale formula:

$$C = \frac{D_0}{n} = \frac{6000}{5} = 1200.$$

Ogni riga del piano viene compilata utilizzando le seguenti formule:

$$I_k = D_{k-1} \cdot i, \quad R_k = C + I_k, \quad D_k = D_{k-1} - C.$$

Il piano è riportato nella seguente tabella:

| N. rata | Quota capitale | Quota interesse | Rata | Debito residuo |
|---------|----------------|-----------------|------|----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 6000 |
| 1 | 1200 | 150 | 1350 | 4800 |
| 2 | 1200 | 120 | 1320 | 3600 |
| 3 | 1200 | 90 | 1290 | 2400 |
| 4 | 1200 | 60 | 1260 | 1200 |
| 5 | 1200 | 30 | 1230 | 0 |

- (iii) Il piano di ammortamento di tipo tedesco si differenzia da quello francese per un fatto cruciale: le rate, anche se costanti, vengono corrisposte anticipatamente. Di conseguenza, la rata R è legata al capitale D_0 da rimborsare dalla relazione:

$$D_0 = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} (1 + i).$$

La quota interesse va riportata sulla stessa riga in cui compare il debito residuo da cui è ottenuta, quindi rispetto all'ammortamento francese la colonna delle quote interesse risulta spostata verso l'alto di un periodo. Una formula di ricorrenza ulteriore che si può utilizzare per il debito residuo è

$$D_k = (D_{k-1} - R)(1 + i).$$

Il piano è riportato nella seguente tabella:

| N. rata | Quota capitale | Quota interesse | Rata | Debito residuo |
|---------|----------------|-----------------|----------|----------------|
| 0 | 0 | 146,341 | 146,341 | 6000 |
| 1 | 1.141,48 | 118,501 | 1.259,98 | 4.858,519 |
| 2 | 1.170,017 | 89,964 | 1.259,98 | 3.688,502 |
| 3 | 1.199,268 | 60,713 | 1.259,98 | 2.489,234 |
| 4 | 1.229,249 | 30,732 | 1.259,98 | 1.259,98 |
| 5 | 1.259,98 | 0 | 1.259,98 | 0 |

Esercizio 3. Si completi il seguente piano di ammortamento composto da 4 rate semestrali, sapendo che il tasso annuo effettivo è pari al 7%. Si noti che la quantità R dovrà essere opportunamente calcolata.

| N. rata | Quota capitale | Quota interesse | Rata | Debito residuo |
|---------|----------------|-----------------|------|----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| 1 | 200 | | | |
| 2 | | | 190 | |
| 3 | $0.9 \cdot R$ | | R | |
| 4 | | | | |

Soluzione. Prima di tutto, occorre determinare il tasso semestrale a partire dal tasso annuo effettivo;

$$r_2 = (1 + r_{eff})^{\frac{1}{2}} - 1 = (1 + 0.07)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.034408 = 3.4408\%.$$

A questo punto, si può completare il piano di ammortamento.

- (i) Dato che la quota capitale C_1 è nota, si possono calcolare la quota interessi I_1 , la rata R_1 e il debito residuo D_1 :

$$I_1 = D_0 \cdot r_2 = 1000 \cdot 0.034408 = 34.408,$$

$$R_1 = C_1 + I_1 = 200 + 34.408 = 234.408,$$

$$D_1 = D_0 - C_1 = 1000 - 200 = 800;$$

- (ii) dato che la rata R_2 è nota, è possibile calcolare la quota interessi I_2 , la quota capitale C_2 e il debito residuo D_2 :

$$I_2 = D_1 \cdot r_2 = 800 \cdot 0.034408 = 27.52,$$

$$C_2 = R_2 - I_2 = 190 - 27.52 = 162.48,$$

$$D_2 = D_1 - C_2 = 800 - 162.48 = 637.52;$$

- (iii) si calcola, come al solito, la quota interessi I_3 , che è data da

$$I_3 = D_2 \cdot r_2 = 637.52 \cdot 0.034408 = 21.931.$$

La rata R_3 è calcolata in modo che soddisfi la seguente condizione

$$R_3 = I_3 + 0.9 \cdot R_3 \text{ ovvero } R_3 - 0.9 \cdot R_3 = 21.931 \implies R_3 = \frac{21.931}{0.1} = 219.31;$$

di conseguenza, la quota capitale C_3 e il debito residuo D_3 sono dati da:

$$C_3 = 0.9 \cdot R_3 = 0.9 \cdot 219.31 = 197.379,$$

$$D_3 = D_2 - C_3 = 637.52 - 197.379 = 440.141;$$

- (iv) siccome la quota interessi I_4 è ottenuta da

$$I_4 = D_3 \cdot r_2 = 440.141 \cdot 0.034408 = 15.141,$$

e dato che la quota capitale C_4 deve essere uguale al debito residuo D_3 , ne segue che la rata R_4 è data da

$$R_4 = I_4 + C_4 = 15.141 + 440.141 = 455.282.$$

Il piano è riportato nella seguente tabella.

| N. rata | Quota capitale | Quota interesse | Rata | Debito residuo |
|---------|----------------|-----------------|---------|----------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| 1 | 200 | 34.408 | 234.408 | 800 |
| 2 | 162.48 | 27.52 | 190 | 637.52 |
| 3 | 197.379 | 21.931 | 219.31 | 440.141 |
| 4 | 440.141 | 15.141 | 455.282 | 0 |

Esercizio 4 (Esercizio per casa). Si consideri l'ammortamento di una somma S pari a € 15 000 in 4 anni, a rata costante pagata posticipatamente alla fine di ciascun anno e con tasso di interesse annuo del 5%. Compilare il piano di ammortamento riportando, relativamente a ciascuna scadenza, il valore della rata, la sua decomposizione in quota capitale e quota interesse e il debito residuo dopo il pagamento della rata. Nell'ipotesi che la rata non possa superare i 4 000 €, in quanti anni potrà essere ammortizzato il debito?

Esercizio 5 (Esercizio per casa). Si consideri l'ammortamento a quota capitale costante di una somma S pari a € 15 000 in 3 anni, con rata pagata posticipatamente alla fine di ciascun anno ed essendo il tasso annuo pari al 3.50%. Compilare il piano di ammortamento riportando, relativamente a ciascuna scadenza, il valore della rata, la sua decomposizione in quota capitale e quota interesse e il debito residuo dopo il pagamento della rata. Nell'ipotesi che la rata non possa superare i 5 000 €, in quanti anni potrà essere ammortizzato il debito?

Esercizio 6 (Esercizio per casa). Ripetere l'esercizio 2, nel caso in cui l'ammortamento sia a rata anticipata (di tipo tedesco) ma con quota capitale costante.