Esercitazione di Matematica Finanziaria

Corso di laurea in Economia e Management

03 Maggio 2019

Esercizio 1. Un lavoratore stipula (oggi) una pensione integrativa che gli permetterà di avere $R = 900$ €, all'inizio di ogni mese tra $N = 180$ mesi per sempre (rendita perpetua). Per questo effettua versamenti mensili anticipati (da oggi) a rata costante A. Determinare l'importo di tali versamenti A, assumento un tasso di interesse effettivo annuo $r = 5\%$.

Soluzione. Dato che i versamenti e le rate delle rendita sono erogate mensilmente, dalla formula dei tassi equivalenti, ricaviamo il tasso mensile:

$$r_m = (1 + 0.05)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.004074124.$$

Consideriamo le seguenti operazioni:

- l'operazione che rappresenta il flusso versamenti

$$\mathbf{a}|t = (A, A, \ldots, A)|(0, 1, \ldots, N-1);$$

- l'operazione che rappresenta il flusso della rendita, associata alla pensione integrativa

$$\mathbf{b}|t = (R, R, R\ldots)|(N, N+1, N+2, \ldots),$$

  erogata a partire dal mese N.

Il capitale al tempo N che si va ad accumulare con i versamenti, deve coincidere con il valore al tempo N della rendita.
Dato che

$$V(\mathbf{a}, N) = (1 + r_m)^N A \sum_{k=0}^{N-1} (1 + r_m)^{-k} = (1 + r_m)^N A(1 + r_m)\frac{1 - (1 + r_m)^{-N}}{r_m},$$

e

$$V(\mathbf{b}, N) = R \sum_{k=N}^{\infty} (1 + r_m)^{N-k} = R \sum_{h=0}^{\infty} (1 + r_m)^{-h} = R\frac{1 + r_m}{r_m},$$

si ottiene che

$$V(\mathbf{a}, N) = V(\mathbf{b}, N) \Longleftrightarrow (1 + r_m)^N A(1 + r_m)\frac{1 - (1 + r_m)^{-N}}{r_m} = R\frac{1 + r_m}{r_m}.$$

Da cui, si ha che il valore degli importi è

$$A = R\frac{(1 + r_m)^{-N}}{1 - (1 + r_m)^{-N}} = R\frac{1}{(1 + r_m)^N - 1} = 900\frac{1}{(1 + 0.004074124)^{180} - 1} = 834.1612.$$

Esercizio 2. Calcolare prezzo e duration di una obbligazione con cedole quadrimestrali al TAN del 9% quando mancano un anno e 4 mesi alla scadenza, subito dopo pagata la cedola, se il tasso di mercato è il 6% nominale (YTM).

Soluzione. Dato che l'operazione finanziaria è descritta dal seguente flusso

$$x|t = \{3, 3, 3, 103\}|(1, 2, 3, 4),$$

abbiamo che il prezzo è dato da

$$P = 3 \cdot d + 3 \cdot d^2 + 3 \cdot d^3 + 103 \cdot d^4 = 103.81 \text{€},$$

dove $d = (1 + 0.02)^{-1}$. Era possibile determinare il prezzo, anche, utilizzando la seguente formula

$$P = \frac{F}{(1 + \lambda/m)^n} + \frac{C}{\lambda}\left[1 - \frac{1}{(1 + \lambda/m)^n}\right], \tag{1}$$

dove F è il valore nominale dell'obbligazione, C è l'importo annuo delle cedole ed m il numero di cedole l'anno.
Per il calcolo della duration, utilizziamo la seguente formula esplicita

$$D = \frac{1 + y}{my} - \frac{1 + y + n(c - y)}{mc[(1 + y)^n - 1] + my} \tag{2}$$

dove c è il tasso cedolare, y il rendimento per periodo, m il numero di pagamenti che vengono effettuati ogni anno ed n il numero di periodi prima della scadenza, ottenendo $D = 1.27$ anni.

Esercizio 3. Considerare un portafoglio composto da $q_1 = 100$ quote di un BTP con prezzo $P_1 = 101.3$ e duration $D_1 = 2.4$ e $q_2 = 150$ quote di un BTP con prezzo $P_2 = 104.2$ e duration $D_2 = 4.5$. Il tasso di rendimento di mercato è 6%. Calcolare la Duration del portafoglio ed approssimare il nuovo valore del portafoglio se il tasso di rendimento diventa del 8%.

Soluzione. Per il calcolo della duration del portafoglio, si utilizza la usuale formula; cioè

$$D = q_1 \frac{P_1}{P} D_1 + q_2 \frac{P_2}{P} D_2, \tag{3}$$

dove P è il valore attuale del portafoglio.
Dato che

$$P = q_1 P_1 + q_2 P_2 = 100 \cdot 101.3 + 150 \cdot 104.2 = 10130 + 15630 = 25760,$$

allora, da (3), la duration del portafoglio è

$$D = 100 \frac{101.3}{25760} 2.4 + 150 \frac{104.2}{25760} 4.5 = 0.9437888 + 2.7303959 = 3.67418.$$

Per ottenere il nuovo valore del portafoglio, a seguito di aumento del tasso di rendimento, si utilizza la regola del "pollice":

$$\Delta P = -\frac{D}{1 + \lambda} P \Delta\lambda;$$

da cui, si ottiene che

$$\widetilde{P} = P - \frac{D}{1 + \lambda} P \Delta\lambda = P\left(1 - \frac{D}{1 + \lambda}\Delta\lambda\right) = 25760\left(1 - \frac{3.67418}{1 + 0.06} 0.02\right) = 23974.2$$

Esercizio 4. Si supponga di dover disporre di una somma pari a € 20 000 tra 2 anni e quindi di investire in due tipologie di ZCB, rispettivamente con scadenza tra 1 e 3 anni, entrambe con valore nominale di € 100, al tasso di mercato del 4%. Si costruisca un portafoglio di tali titoli in modo tale che questo risulti immunizzato rispetto ad un'ipotetica variazione immediata del tasso. Provare l'efficacia dell'immunizzazione sia nel caso in cui ci sia un'immediata diminuzione del tasso al 2.5%, sia nel caso di un aumento immediato al 5.5%.

Soluzione. Al tasso di mercato del 4%, il valore attuale $V_0^{x_1}$ e la duration D^{x_1} dello ZCB con scadenza tra un anno e il valore attuale $V_0^{x_2}$ e la duration D^{x_2} dello ZCB con scadenza fra 3 anni, sono pari a

$$\begin{aligned} V_0^{x_1} &= 100(1+0.04)^{-1} = 96.1538 \text{ €} \qquad D^{x_1} = 1 \text{ anni}, \\ V_0^{x_2} &= 100(1+0.04)^{-3} = 88.8996 \text{ €} \qquad D^{x_2} = 3 \text{ anni}. \end{aligned}$$

Mentre l'operazione finanziaria, costituita dalla singola uscita di € 20 000 tra 2 anni, ha valore attuale e duration pari a

$$V_0^y = 20000(1+0.04)^{-2} = 18\,491.12 \text{ €} \qquad D^y = 2 \text{ anni}.$$

Per ottenere un portafoglio immunizzato dobbiamo determinare le quote n_{x_1} e n_{x_2} da investire rispettivamente nella prima e nella seconda tipologia di ZCB in modo tale che il valore attuale del portafoglio sia uguale al valore attuale dell'uscita futura. Allo stesso modo, la duration del portafoglio deve coincidere con quella dell'uscita futura. Ovvero n_{x_1} e n_{x_2} dovranno essere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} n_{x_1} V_0^{x_1} + n_{x_2} V_0^{x_2} = V_0^y \\ n_{x_1} \frac{V_0^{x_1}}{V_0} D^{x_1} + n_{x_2} \frac{V_0^{x_2}}{V_0} D^{x_2} = D^y \end{cases}$$

dove V_0 è il valore attuale del portafoglio che, per la prima equazione, è proprio uguale a V_0^y. Tenendo conto di quest'ultima uguaglianza, sostituendo i rispettivi valori delle duration, dividendo ambo i membri della prima equazione per V_0^y e infine operando le sostituzioni

$$\alpha_1 = \frac{n_{x_1} V_0^{x_1}}{V_0^y} \qquad \alpha_2 = \frac{n_{x_2} V_0^{x_2}}{V_0^y},$$

otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 2. \end{cases}$$

La soluzione di questo ultimo sistema è $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ da cui si ottengono

$$n_{x_1} = \frac{V_0^y}{2V_0^{x_1}} = 96.1539, \qquad n_{x_2} = \frac{V_0^y}{2V_0^{x_2}} = 104.$$

A questo punto, fissate le quote, se il tasso passa al 2.5% il valore attuale dell'investimento in ZCBs e il valore futuro tra due anni sono rispettivamente

$$\begin{aligned} V_0 &= 96.1539 \cdot 100 \cdot (1+0.025)^{-1} + 104 \cdot 100 \cdot (1+0.025)^{-3} = 19\,038.30 \text{ €} \\ V_2 &= V_0 \cdot (1+0.025)^2 = 20\,002.12 \text{ €}. \end{aligned}$$

Se invece il tasso aumenta istantaneamente al 5.5% allora, il valore attuale del portafoglio e il suo valore futuro sono rispettivamente

$$
\begin{aligned}
V_0 =& 96.1539 \cdot 100 \cdot (1+0.055)^{-1} + 104 \cdot 100 \cdot (1+0.055)^{-3} = 17\,970.89 \text{ €} \\
V_2 =& V_0 \cdot (1+0.055)^2 = 20\,002.06 \text{ €}.
\end{aligned}
$$

In entrambi i casi il portafoglio riesce ancora a coprire l'uscita di 20 000 € tra due anni.

Esercizio 5 (Esercizio per casa)**.** Si supponga di dover disporre di una somma pari a € 100 000 tra 1.5 anni e quindi di investire in due tipologie di obbligazioni:

- uno ZCB con valore nominale di 100 euro, vita residua un anno;
- un BTP con valore nominale di 100 euro, tasso cedolare 3%, cedola semestrale e vita residua 2 anni.

Supponendo che il rendimento a scadenza sia del 4% su base annua, si costruisca un portafoglio di tali titoli in modo tale che questo risulti immunizzato rispetto ad un'ipotetica variazione immediata del tasso.

Esercizio 6 (Esercizio per casa)**.** Si supponga di dover disporre di una somma pari a € 100 000 tra 1.5 anni e quindi di investire in due tipologie di BTP, rispettivamente con scadenza tra 1 e 2 anni, entrambe con valore nominale di € 100, tasso cedolare $c_1 = 2\%$, $c_2 = 5\%$ rispettivamente e pagamenti semestrali. Supponendo che il rendimento a scadenza sia pari al 5%, si costruisca un portafoglio di tali titoli in modo tale che questo risulti immunizzato rispetto ad un'ipotetica variazione immediata del tasso.