Esercitazioni di Matematica Finanziaria

Corso di laurea in Economia e Finanza (Mercati Finanziari)

12 Aprile 2018

Esercizio 1. Si considerino due titoli rischiosi con rendimenti attesi

$$\bar{r}_1 = 0.10 \quad \text{e} \quad \bar{r}_2 = 0.15,$$

e deviazioni standard

$$\sigma_1 = 0.08 \quad \text{e} \quad \sigma_2 = 0.12.$$

Nell'ipotesi che la correlazione tra i due titoli sia pari a $\rho = 0.5$, determinare

(i) il rendimento atteso e deviazione standard del portafoglio a varianza minima con rendimento atteso del 12%;

(ii) il rendimento atteso e deviazione standard del portafoglio a varianza minima globale.

Soluzione. Indicando con w_1 e w_2 le quote investite nei titoli a_1 e a_2 che compongono il portafoglio, si ha che:

- il rendimento del portafoglio è la combinazione lineare dei rendimenti dei titoli; ovvero
$$\bar{r} = w_1\bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2,$$
- mentre la varianza del portafoglio è data da
$$\sigma^2 = w_1\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 + w_2\sigma_2^2.$$

Per determinare la composizioni del portafoglio a varianza minima con vincolo di rendimento e del portafoglio a varianza minima globale, occorre risolvere i seguenti problemi:

$$(\mathcal{PB}_1) \quad \begin{cases} \min\limits_{w_1,w_2} & \frac{1}{2}\,\sigma^2(w_1,w_2) \\ \text{s.v.} & w_1 + w_2 = 1 \\ & w_1\bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2 = \bar{r} \end{cases} \quad , \quad (\mathcal{PB}_2) \quad \begin{cases} \min\limits_{w_1,w_2} & \frac{1}{2}\,\sigma^2(w_1,w_2) \\ \text{s.v.} & w_1 + w_2 = 1 \end{cases} .$$

Per determinare la soluzione del problema $(\mathcal{PB}_1)$, occorre determinare i punti stazionari della funzione lagrangiana ad esso associato, così definita:

$$L(w, 1-w; \lambda) := \tfrac{1}{2}\,\sigma^2(w, 1-w) - \lambda(w\bar{r}_1 + (1-w)\bar{r}_2 - \bar{r}), \tag{1}$$

dove $w_1 = w$ e $w_2 = 1 - w$. Derivando rispetto a w e λ, il punto stazionario di L deve soddisfare il seguente sistema.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial w}\frac{1}{2}\,\sigma^2(w, 1-w) - \lambda(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = 0, \\ w\bar{r}_1 + (1-w)\bar{r}_2 - \bar{r} = 0. \end{cases}$$

E' chiaro che per determinare le quote che minimizzano, è sufficiente risolvere la seconda equazione del sistema precedente, ottenendo che

$$w_1^\star = w^\star = \frac{\bar{r} - r_2}{r_1 - r_2}, \quad w_2^\star = 1 - w^\star = \frac{r_1 - \bar{r}}{r_1 - r_2}. \tag{2}$$

Per determinare la soluzione del problema ($\mathcal{PB}_2$), è sufficiente porre $\lambda = 0$ in (1), ottenendo che la quota $w^\star$ è soluzione dell'equazione

$$\tfrac{\partial}{\partial w} \tfrac{1}{2} \sigma^2(w, 1-w) = 0;$$

da cui segue che

$$w_1^\star = w^\star = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \quad w_2^\star = 1 - w^\star = \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}. \tag{3}$$

(i) Da (2), si ha che

$$w_1^\star = 0.6, \qquad \text{e} \qquad w_2^\star = 0.4;$$

di conseguenza, la varianza è

$$\begin{aligned}\sigma^2 =& (w_1^\star)^2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1^\star w_2^\star + (w_2^\star)^2\sigma_2^2 \\ =& (0.6)^2(0.08)^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.08 \cdot 0.12 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + (0.4)^2(0.12)^2 \\ =& 0.006912,\end{aligned}$$

e la deviazione standard è $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.006912} = 0.08314$.

(ii) Da (3), si ha che

$$\begin{aligned} w_1^\star &= \frac{(0.12)^2 - 0.5 \cdot 0.08 \cdot 0.12}{(0.08)^2 + (0.12)^2 - 2 \cdot 0.5 \cdot 0.08 \cdot 0.12} = 0.8571, \\ w_2^\star &= \frac{(0.08)^2 - 0.5 \cdot 0.08 \cdot 0.12}{(0.08)^2 + (0.12)^2 - 2 \cdot 0.5 \cdot 0.08 \cdot 0.12} = 0.1429. \end{aligned}$$

Ne consegue che il rendimento del portafoglio di minima varianza è

$$\bar{r} = w_1^\star \bar{r}_1 + w_2^\star \bar{r}_2 = 0.8571 \cdot 0.1 + 0.14 \cdot 0.15 = 0.1071,$$

e la varianza del portafoglio è

$$\begin{aligned}\sigma^2 =& (w_1^\star)^2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w_1^\star w_2^\star + (w_2^\star)^2\sigma_2^2 \\ =& (0.8571)^2(0.08)^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.08 \cdot 0.12 \cdot 0.8571 \cdot 0.1429 + (0.1429)^2(0.12)^2 \\ =& 0.0062.\end{aligned}$$

Di conseguenza, la deviazione standard è data da $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.0062} = 0.0785844$.

Esercizio 2. Dati 3 titoli con rendimento atteso $\bar{r}_1 = 4\%$, $\bar{r}_2 = 5\%$ e $\bar{r}_3 = 7\%$ e matrice di varianza e covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trovare il portafoglio efficiente con rendimento $\bar{r} = 6\%$.

Soluzione. Le quote $w_1^\star$, $w_2^\star$ e $w_3^\star$ del portafoglio a varianza minima sono determinate come soluzione del seguente problema

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{w_1,w_2,w_3} & \frac{1}{2}\sigma^2(w_1,w_2,w_3). \\ \text{s.v.} & w_1+w_2+w_3=1 \\ & w_1\bar{r}_1+w_2\bar{r}_2+w_3\bar{r}_3=\bar{r} \end{array}.$$

Dalla funzione lagrangiana così definita

$$\begin{aligned} L(w_1,w_2,w_3;\lambda,\mu) :=& \frac{1}{2}\sigma^2(w_1,w_2,w_3) - \lambda(w_1+w_2+w_3-1) \\ & - \mu(w_1\bar{r}_1+w_2\bar{r}_2+w_3\bar{r}_3-\bar{r}) \\ =& \frac{1}{2}[w_1^2+2w_2w_3+2w_2^2+3w_3^2] - \lambda(w_1+w_2+w_3-1) \\ & - \mu(w_1\bar{r}_1+w_2\bar{r}_2+w_3\bar{r}_3-\bar{r}), \end{aligned}$$

dove λ e μ sono i moltiplicatori di Lagrange, occorre determinare la soluzione $w_1^\star$, $w_2^\star$, $w_3^\star$, $\lambda^\star$ e $\mu^\star$ del seguente sistema[1]

$$\begin{cases} w_1-\lambda-\mu\bar{r}_1=0, \\ w_3+2w_2-\lambda-\mu\bar{r}_2=0, \\ w_2+3w_3-\lambda-\mu\bar{r}_3=0, \\ w_1+w_2+w_3-1=0, \\ w_1\bar{r}_1+w_2\bar{r}_2+w_3\bar{r}_3-\bar{r}=0. \end{cases} \tag{4}$$

Per ottenere la soluzione del sistema (4), si procederà per passi.

STEP 1: Determiniamo le quote w_1, w_2 e w_3 in funzione di λ e μ. Dalle prime due equazioni del sistema (4), si ottiene:

$$w_1=\lambda+\mu\bar{r}_1=\lambda+0.04\mu, \tag{5}$$

$$w_3=\lambda+\mu\bar{r}_2-2w_2=\lambda+0.05\mu-2w_2. \tag{6}$$

Dalla terza equazioni, ricavando w_2 ed utilizzando (6), si ha

$$\begin{aligned} w_2 &= \lambda+\mu\bar{r}_3-3w_3=\lambda+0.07\mu-3(\lambda+0.05\mu-2w_2) \\ &= -2\lambda-0.08\mu+6w_2; \end{aligned}$$

da cui si ottiene w_2

$$w_2=0.4\lambda+0.016\mu. \tag{7}$$

Sostituendo (7) in (6), si ottiene

$$w_3=\lambda+0.05\mu-2(0.4\lambda+0.016\mu)=0.2\lambda+0.018\mu. \tag{8}$$

[1] Il sistema è ottenuto derivando la Lagrangiana rispetto alle quote w_i e ai moltiplicatori di Lagrange.

STEP 2: Determinano λ e μ. Sostituendo (5), (7) e (8) nelle quarta equazione del sistema (4), si ottiene

$$w_1 + w_2 + w_3 - 1 = \lambda + 0.04\mu + 0.4\lambda + 0.016\mu + 0.2\lambda + 0.018\mu - 1 = 0,$$

dalla quale, si ha che

$$1.6\lambda + 0.074\mu = 1. \tag{9}$$

Sostituendo (5), (7) e (8) nelle quinta equazione del sistema (4), si ottiene

$$\begin{aligned} w_1\bar{r}_1 + w_2\bar{r}_2 + w_3\bar{r}_3 - \bar{r} &= 0.04(\lambda + 0.04\mu) + 0.05(0.4\lambda + 0.016\mu) \\ &\quad + 0.07(0.2\lambda + 0.018\mu) - 0.06 = 0 \end{aligned}$$

dalla quale, si ha che

$$0.074\lambda + 0.00366\mu = 0.06, \quad \Longrightarrow \quad 1.2333\lambda + 0.061\mu = 1. \tag{10}$$

Il sistema generato dall'equazioni (9) e (10), ammette una unica soluzione data da

$$\lambda = -2.0526317, \quad \mu = 57.89474. \tag{11}$$

STEP 3: Determiniamo le quote w_1, w_2 e w_3. Sostituendo i valori di λ e μ (trovati in (11)) in (5), (7) e (8), si ottiene che

$$w_1 = 0.2631, \quad w_2 = 0.1053, \quad w_3 = 0.6316. \tag{12}$$

Esercizio 3. Siano A e B due portafogli efficienti con rendimenti atteso $\bar{r}_A = 3\%$ e $\bar{r}_B = 6\%$, deviazione standard $\sigma_A = 0.2$ e $\sigma_B = 0.4$, e correlazione $\rho = -0.5$.

(i) Determinare la deviazione standard del portafoglio efficiente C con rendimento atteso $\bar{r}_C = 5\%$;

(ii) supponendo di aver investito 1500 € nel portafoglio C, determinare l'importo che occorre investire nel portafoglio A;

(iii) investendo un capitale di 1000 € nel portafoglio efficiente a varianza minima, calcolare il valore atteso dell'investimento.

Soluzione. (i) Per il teorema dei due fondi, ogni portafoglio efficiente è combinazione lineare convessa dei due portafoglio efficienti. Quindi, il portafoglio efficiente con $\bar{r}$, si ottiene risolvendo l'equazione

$$\alpha\bar{r}_A + (1-\alpha)\bar{r}_B = \bar{r} \Longrightarrow \alpha = \frac{\bar{r} - \bar{r}_B}{\bar{r}_A - \bar{r}_B} = \frac{1}{3}.$$

Ne consegue che la varianza del portafoglio è data da

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \alpha^2\sigma_A^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_A\sigma_B + (1-\alpha)^2\sigma_B \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 (0.2)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5 \cdot (0.2) \cdot (0.4) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (0.4)^2 \\ &= 0.0577, \end{aligned}$$

e la deviazione standard è $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 0.2402$.

(ii) Se α è la quota investita in A, l'importo richiesto è

$$X_A = 1500\alpha = 500\,€.$$

(iii) Le quote che compongono il portafoglio a varianza minima sono

$$\begin{aligned}
\alpha_1^\star &= \frac{\sigma_B^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B} \\
&= \frac{(0.4)^2 + 0.5(0.2)(0.4)}{(0.4)^2 + (0.2)^2 + 2\cdot 0.5(0.2)(0.4)} = 0.7143, \\
\alpha_2^\star &= \frac{\sigma_A^2 - \rho\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B} \\
&= \frac{(0.2)^2 + 0.5(0.2)(0.4)}{(0.4)^2 + (0.2)^2 + 2\cdot 0.5(0.2)(0.4)} = 0.2857.
\end{aligned}$$

Il valore atteso dell'investimento è

$$\mathbb{E}[I] = 1000(\alpha_1^\star \bar{r}_A + \alpha_2^\star \bar{r}_B) = 1000(0.7143 \cdot 0.03 + 0.2857 \cdot 0.06) = 38.57\,€.$$

Esercizio 4 (Esercizio per casa)**.** Si consideri un mercato in cui sono presenti i seguenti titoli:

- uno ZCB x con scadenza tra 1 anno, con valore facciale di € 1 e prezzo di € 0.94;
- uno ZCB y con scadenza tra 3 anni, con valore facciale di € 1 e prezzo di € 0.83;
- un contratto a termine z che garantisce € 1 tra 3 anni al prezzo di € 0.86, stipulato oggi e pagato tra un anno.

Verificare la possibilità di arbitraggio ed eventualmente costruire una strategia di arbitraggio immediato, ovvero una strategia costituita da un'operazione finanziaria che abbia un flusso strettamente positivo al tempo $t = 0$ e tutti gli altri nulli.

Esercizio 5 (Esercizio per casa)**.** Consideriamo un mercato uniperiodale in cui sono quotati 2 titoli rischiosi, con prezzi di emissione $P_1 = 100\,€$ e $P_2 = 80\,€$. Supponendo che i payoff dei rispettivi titolo sono

$$A_1 = \begin{cases} 150 & p = 0.4 \\ 80 & 1-p = 0.6 \end{cases} \qquad A_2 = \begin{cases} 120 & p = 0.3 \\ -0 & 1-p = 0.7 \end{cases},$$

determinare il rendimento atteso e la deviazione standard del portafoglio a varianza minima.

Esercizio 6 (Esercizio per casa)**.** Determinare il rendimento medio del portafoglio di minima varianza (MVP) tra tutti quelli che si ottengono combinando tre titoli rischiosi, di rendimenti medi $\bar{r}_i$ e varianze note σ_i^2, tali che il rendimento del terzo titolo sia non correlato con gli altri due e la covarianza dei rendimenti degli altri due titoli sia nota.
Dati:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.15, \quad r_3 = 0.2, \quad \sigma_1 = 4, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 2, \quad \sigma_{1,2} = 3.$$