MATEMATICA GENERALE - Canali III, IV

Sessione Invernale, Compito Test, 15/12/2011, A.A. 2011/2012

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Canale ☐ III (Prof. Ramponi) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma ....

1) *(9 p.ti)* Studiare la funzione $f(x) = x^2 e^{1/x}$.

a] Dominio e segno
La funzione è definita per ogni $x \neq 0$: il dominio è dunque $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.
Inoltre $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$.

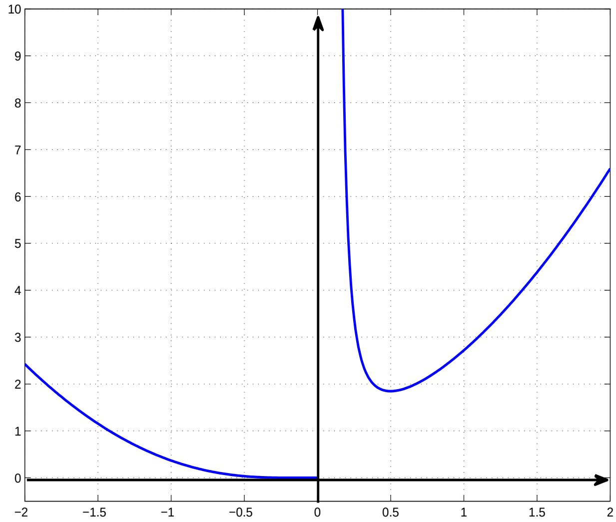
b] Limiti e asintoti
$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x^2}$ =(applicando de l'Hôpital) $= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}(1/x^2)}{2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{2/x} =$ (de l'Hôpital) $= \lim_{x\to 0^+} 2e^{1/x} = +\infty$.
$\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{1/x} = 0$.
$\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{1/x} = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} x^2 e^{1/x} = +\infty$.
$x = 0$ è un asintoto verticale (destro). Nessun asintoto orizzontale od obbliquo.

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)
$f'(x) = 2xe^{1/x} - x^2 e^{1/x} \frac{1}{x^2} = e^{1/x}(2x - 1)$: quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1/2$, unico punto stazionario.

d] Studio massimi e minimi
Segno di f': $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 1/2$ e $f'(x) < 0$ per $x < 1/2$. La funzione è dunque crescente in $(1/2, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$. Il punto $x = 1/2$ è dunque un minimo relativo, dove la funzione vale $f(1/2) = e^2/4$.

(Opz. $f''(x) = e^{1/x}(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 2) = \frac{e^{1/x}}{x^2}(1 - 2x + 2x^2) \Rightarrow f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$).

e] Grafico (lo studio di eventuali flessi è opzionale).



2) *(5 p.ti)* Determinare la primitiva della funzione $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e calcolare l'area compresa tra il grafico della funzione f e l'asse orizzontale nell'intervallo $[1/2, 3]$.

La primitiva è $\int(x^2 - 5x + 4)dx = x^3/3 - 5x^2/2 + 4x + c$.
Poichè la funzione integranda è positiva in $[1/2, 1)$ e negativa in $(1, 4]$, l'area è

$$\int_{1/2}^{1}(x^2 - 5x + 4)dx - \int_{1}^{3}(x^2 - 5x + 4)dx = \left(x^3/3 - 5x^2/2 + 4x\Big|_{1/2}^{1}\right) - \left(x^3/3 - 5x^2/2 + 4x\Big|_{1}^{3}\right)$$

$$= \left(\frac{11}{6} - \frac{17}{12}\right) - \left(-\frac{3}{2} - \frac{11}{6}\right) = \frac{15}{4}$$

3) *(7 p.ti)* Studiare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x - y = t \\ -x + ty = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

La matrice completa è $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & t \\ -1 & t & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$: il determinante è dunque $det(\tilde{A}) = -2t^2 + 5t - 3$, che si annulla per $t_1 = 3/2$ e $t_2 = 1$.
Se $t \neq 3/2$ e $t \neq 1$, il rango di $\tilde{A}$ è rango$(\tilde{A}) = 3$ da cui segue per il Teorema di Rouché-Capelli che il sistema non può avere soluzioni (infatti la matrice incompleta (dei coefficienti) avrà al massimo rango 2).
Analizziamo quindi separatemente i due casi $t = 3/2$ e $t = 1$.

Caso $t = 3/2$. La matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 (p.e. si consideri il minore $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ che ha determinante $1/2$) e dunque anche la matrice completa ha stesso rango. Il sistema ammette $\infty^{2-2} = 1$ soluzione:

$$\begin{cases} x - y & = & 3/2 \\ -x + 3/2y & = & 1 \end{cases}, \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 3/2 & -1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix}}{1/2} = 13/2, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{1/2} = 5.$$

Caso $t = 1$. La matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 1 poichè tutti i minori di ordine 2 sono nulli. Viceversa la matrice completa $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 2 (p.e. si consideri il minore $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). Quindi il sistema non ammette soluzioni.

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.

4) *(2 p.ti)* La serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty}(3/4)^k$ converge.

☑Vero ☐ Falso

5) *(2 p.ti)* Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ si può dire che :

1. esiste un intorno di ∞ per cui $f(x) = l$
2. $\forall\epsilon > 0$ esiste un x_ϵ tale che $\forall x > x_\epsilon$ vale $|f(x) - l| < \epsilon$ ✓
3. $\forall\epsilon > 0$ esiste un x_ϵ tale che $\forall x > x_\epsilon$ vale $|f(x)| < l$

6) *(2 p.ti)* Sia $f(x, y)$ definita in $\mathbb{R}^2$ con derivate parziali prime nulle in $(0, 0)$ e hessiano

$$H = \begin{pmatrix} 6 - 8y & -8x \\ -8x & 6y + 2 \end{pmatrix}$$

allora

1. $(0, 0)$ è un punto di minimo ✓
2. $(0, 0)$ è un punto di massimo
3. $(0, 0)$ è un punto di sella

7) *(2 p.ti)* La funzione $f(x) = |x| + 1$ è:

1. continua ma non derivabile ✓
2. continua e derivabile
3. integrabile e derivabile

8) *(2 p.ti)* Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione $g(x) = f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Tale funzione è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b): inoltre $g(a) = g(b) = 0$. Possiamo quindi applicare il Teorema di Rolle: esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ dove $g'(c) = 0$, ovvero

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Leftrightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).\square$$