Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

MATEMATICA GENERALE

Prof. Manzini - Dr.ssa Valdivia

Argomenti trattati durante l'esercitazione di Lunedì 11 Novembre 2013

- Limiti
  - Definizione di derivata e suo significato geometrico
  - Verifica di definizione di derivata
  - Applicazione delle regole di derivazione
  - Funzioni non derivabili e riconoscimento del tipo di non derivabilità:
    - Punti angolosi
    - Cuspidi
    - Punti di flesso a tangente verticale
  - Esercizi parametrici in cui si richiede calcolo del parametro per avere derivabilità
  - Calcolo di retta tangente
  - Regola di de l'Hôpital e sua applicazione su calcolo di limiti

Esercizi svolti in aula e da svolgere a casa

- Calcolare, adoperando la definizione, la derivata delle seguenti funzioni nei punti a fianco indicati

$$\begin{gathered} y = f(x) = x^3 - 1 \quad x_0 = 0; \\ y = f(x) = \log(x+2) \quad x_0 = 1; \\ y = f(x) = \frac{x^3-3x+1}{x} \quad x_0 = -1; \\ y = f(x) = \sqrt{x+1} \quad x_0 = -\frac{1}{2}; \end{gathered}$$

- Calcolare usando le formule di derivazione, le derivate delle seguenti funzioni

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{2}};$$

$$f(x) = -3\sqrt{x}e^x \tan x;$$
$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x+2};$$
$$f(x) = (\log(\sin x))^4;$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{\log(x+1)}{x}};$$
$$f(x)\frac{\sin(e^{-x})}{x};$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}};$$
$$f(x) = \log\left(\frac{4x-3}{x^2+1}\right);$$
$$f(x)\exp\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right);$$
$$f(x) = \log\left(\frac{5-2x}{x-3}\right);$$
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2};$$
$$f(x) = \begin{cases} e^x + 3x & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{3x}{x^2-1} & \text{se } x > 1 \end{cases};$$

- Determinare i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni

$$f(x) = |x^2 - 1|;$$
$$f(x) = e^{-|x|};$$
$$f(x) = \min(x^2,\ \tfrac{1}{x^2});$$

- Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato. Quando in tale punto la funzione non è derivabile, classificarlo (punto angoloso. a tangente verticale, cuspide ...)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{e^x-1} & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \{x_0 = 0\};$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{e^x-1} & \text{se } x < 0 \\ \log(x+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \{x_0 = 0\};$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan^3(x-1)}{e^x-1} & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 1 \\ x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad \{x_0 = 1\};$$

- Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x) = x^3 e^{2x-2}$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

- Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = f(x) = e^{x^2} + 1$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

– Calcolare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \ln(x^5 + 3x + 4)$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

– Sia

$$f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2 & \text{se} \quad x \geq 0, \\ \alpha \sin x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

determinare α e β in modo che f sia continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

– Sia

$$f(x) = \begin{cases} a \sin 2x - 4 & \text{se} \quad x < 0, \\ b(x-1) + e^x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

determinare a e b in modo che f sia continua e derivabile in $x = 0$.

– Valuta la derivabilità delle seguenti funzioni

$$f(x) = \sqrt[3]{x};$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}.$$

– Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Si dimostri che esiste il

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f'(x),$$

ma che la funzione non è derivabile. Si dia una giustificazione di questo fatto.

– Risolvere i limiti seguenti utilizzando la regola di De L'Hôpital

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}};$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6};$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x+x^2}{x^2-x};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x};$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-1};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)};$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\cos^2 x-1};$$
$$\lim_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}};$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3x+4}{x^4-x^2}.$$