1) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x}$$

a) Dominio e segno,

poiché $\sqrt{x^3 - x} = \sqrt{x(x-1)(x+1)}$ dovrà essere $x(x-1)(x+1) \geq 0$

$\rightarrow$ dominio $= [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

Inoltre $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in$ dominio

b) Limiti

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nessun asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 - x}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - \frac{1}{x}} = +\infty$$

dunque nessun asintoto obliquo. Neppure asintoti verticali.

c) Determinazione punti critici

$$f' = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$$

$f' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

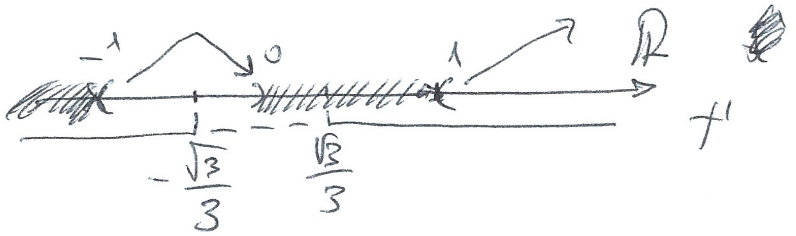
ma $x = + \frac{\sqrt{3}}{3}$ non accettabile

Inoltre i punti $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ sono punti in cui f' non è definita.

d) Studio massimi e minimi

$$f' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}} \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 \geq 0$$

poiché il denominatore è > 0 nel dominio di f'



dunque la f è crescente in $\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, decrescente in $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, e crescente nuovamente in $(1, +\infty)$.

<u>riassumendo</u> (ricordo che $f(x) \geq 0 \ \forall x \in$ dominio)

→ $x = 0$ punto di minimo assoluto, inoltre in esso f non è derivabile:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \sqrt{h - \frac{1}{h}} = +\infty$$

dunque la tangente è verticale; il minimo assoluto è $f(0) = 0$

→ $x = -1$ è punto di minimo assoluto perché $f(-1) = 0$.

Anch'esso punto a tg verticale.

→ $x = 1$ è punto di minimo assoluto perché $f(1) = 0$ e punto a tg verticale.

→ $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ è punto stazionario di massimo relativo, massimo pari a $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{-\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$

relativo perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

e)

$$f'' = \frac{2\sqrt{x^3-x}\,(6x) - (3x^2-1)\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\,\frac{(3x^2-1)}{\sqrt{x^3-x}}}{4(x^3-x)}$$

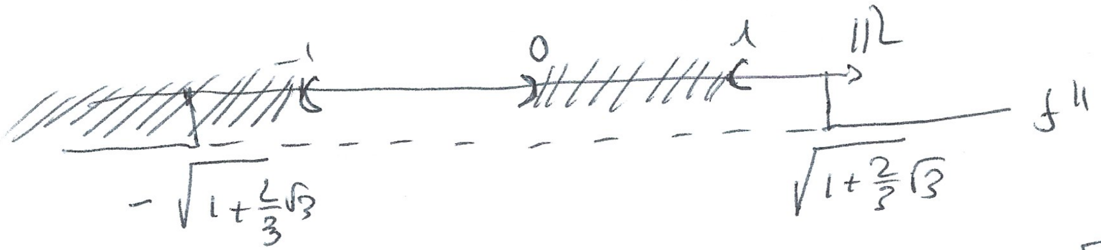
$$= \frac{3x^4-6x^2-1}{4(x^3-x)^{3/2}}$$

$$= \frac{3\left(x^2-1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\left(x^2-1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}{4(x^3-x)^{3/2}}$$

le cui uniche soluzioni accettabili sono

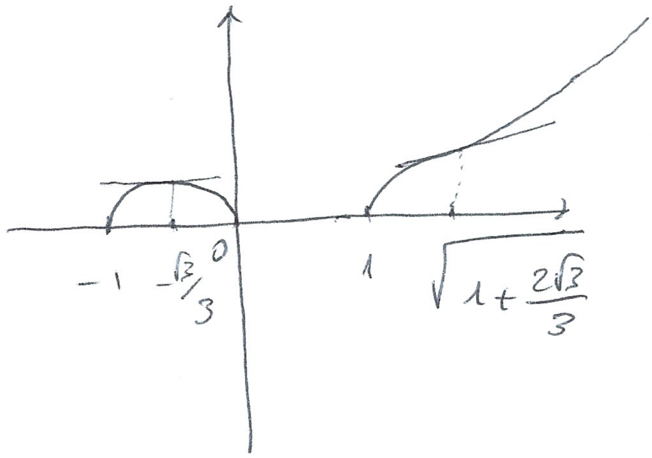
$$x = \pm\sqrt{1+\tfrac{2}{3}\sqrt{3}}$$

d'altronde dobbiamo scartare anche la radice $-\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}$ perché non appartiene al dominio, quindi il segno di f'' sarà:



concava in $(-1;0)$, concava in $\left(1, \sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$ convessa in $\left(\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}, +\infty\right)$; $x = \sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}$ è un punto di flesso.

f) Grafico:



2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \frac{2-x}{8-x^3}$$

Dire se si può eliminare l'eventuale punto di discontinuità ridefinendo opportunamente la funzione in tal punto.

Soluz.

$$\frac{2-x}{8-x^3} = \frac{2-x}{(2-x)(4+2x+x^2)} = \frac{1}{4+2x+x^2} \qquad \forall x \neq 2$$

dunque

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{8-x^3} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{4+2x+x^2} = \frac{1}{12}$$

dunque si può eliminare la discontinuità ridefinendo in $x = 2$ la funzione pari a $1/12$, in altre parole

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{8-x^3} & x \neq 2 \\ \dfrac{1}{12} & x = 2 \end{cases}$$

3) studiare al variare del parametro $s \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ sx + y = 1 \\ sy - z = 0 \end{cases}$$

Soluzione

la matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & s & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = s^2 - 1$$

dunque per $s \neq \pm 1$ si può applicare la regola di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & s & -1 \end{vmatrix}}{s^2-1} = \frac{s}{s^2-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{s^2-1} = \frac{-1}{s^2-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 1 \\ 0 & s & 0 \end{vmatrix}}{s^2-1} = -\frac{s}{s^2-1}$$

studiamo separatamente i casi $s = \pm 1$.

$\underline{s=1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché il minore di B ottenuto orlando quello cerchiato è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

risulta $rg(B) = 3$, dunque il sistema è incompatibile.

$\underline{s=-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

orliamo il minore cerchiato con la 3ª riga e la 4ª colonna, come fatto nel punto precedente, ottenendo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

dunque $rg(B) = 3$ ed anche in questo caso il sistema è incompatibile.

4) Date le funzioni $f(x) = x \log(x-1)$ e $g(x) = x^2+1$, la funzione composta $g(f(x))$ risulta essere:

1. $(x^2+1)\log(x^2)$
2. $x^2(\log(x-1))^2+1$
3. $(x^2+1)\log(x)$

Soluzione:
ovviamente la 2.

5) Assegnate le funzioni $f(x) = \log(x^2+1)$ e $g(x) = \alpha x$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, entrambe infinitesime in $x_0 = 0$, risultano infinitesime dello stesso ordine per

1. $\alpha \neq 0$
2. $\alpha = 2$
3. per nessun valore di α

Soluzione

la 3.

6) Dato un sistema quadrato ed omogeneo, con determinante della matrice dei coefficienti non nullo, ha come unica soluzione quella banale

□ V □ F

Soluz.

VERO

7) Il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x) = (x-1)^2$ in $x_0 = 1$ è

1. $p(x) = (x-1)^2$

2. $p(x) = (x-1)^3$

3. $p(x) = (x-1)$

Svolgimento:

la 1.

8) Dare la definizione di vettori linearmente dipendenti. Dimostrare che 2 vettori sono dipendenti se e solo se sono proporzionali.

Svolgimento

n vettori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono dipendenti se $\exists$ $c_1, \dots, c_n$ costanti reali tali che

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n = \underline{0}$$ con

costanti $c_1, \dots, c_n$ non tutte nulle.

Se 2 vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono proporzionali allora

$\underline{v} = c\underline{w} \rightarrow \underline{v} - c\underline{w} = \underline{0}$ è la combinazione lineare richiesta (con costanti 1 e $-c$).

Se sono dipendenti, $\exists$ α e β non entrambe nulle tali che $\alpha\underline{v} + \beta\underline{w} = \underline{0}$, con $\alpha \neq 0$

si divide per α: $\underline{v} + \frac{\beta}{\alpha}\underline{w} = 0$, e quindi

$\underline{v} = -\frac{\beta}{2}\underline{w}$ cioè ~~sca~~ i due

vettori sono proporzionali.