

MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, I Appello, 14/01/10, A.A. 2009/2010 - Compito 3

Cognome Nome Matricola

Canale ☐ II (Prof. Scarlatti) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma

1) (10 p.ti) Studiare la funzione $f(x) = -\frac{x^3-1}{x^4}$

a] Dominio e segno

Dominio:

$$D = \forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$$

Segno:

$$\begin{array}{llll} f(x) > 0 & \text{per} & x < 0 & \cup & 0 < x < 1 \\ f(x) < 0 & \text{per} & x > 1 & & \\ f(x) = 0 & \text{per} & x = 1 & & \end{array}$$

b] Limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale e $y = 0$ asintoto orizzontale

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$$f'(x) = -\frac{-x^3+4}{x^5}$$

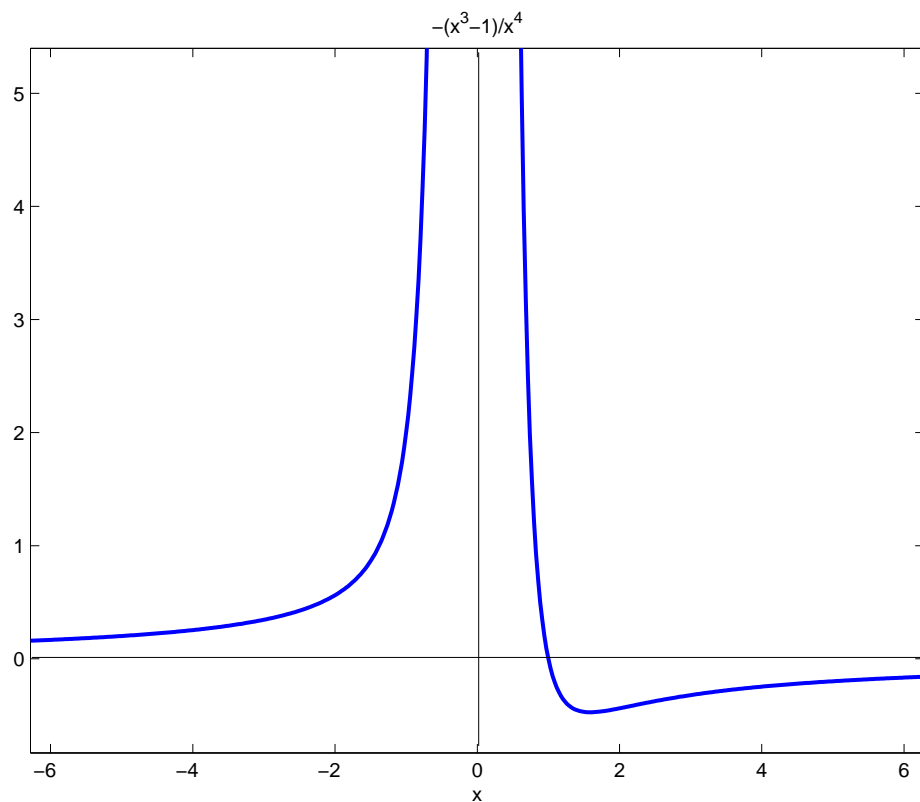
un punto stazionario: $f'(x) = 0$ per $x = \sqrt[3]{4}$

d] Studio massimi e minimi

$$\begin{array}{llll} f'(x) > 0 & \text{funzione crescente per} & x < 0 & \cup & x > \sqrt[3]{4} \\ f'(x) < 0 & \text{funzione decrescente per} & 0 < x < \sqrt[3]{4} & & \end{array}$$

$x = \sqrt[3]{4}$ punto di minimo

$$f(\sqrt[3]{4}) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \text{ valore minimo}$$



2) (6 p.ti) Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \sqrt{x} \log(x) dx$$

Si applica una volta il metodo di integrazione per parti :

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \sqrt{x} & f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ g(x) = \log x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\int \sqrt{x} \log(x) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}$$

quindi

$$\int_1^2 \sqrt{x} \log(x) dx = \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} \log 2 - \frac{4}{9}2^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}$$

3) (8 p.ti) Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x + \alpha z = \alpha - 1 \\ x + y = \alpha - 1 \\ \alpha x + z = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \alpha - 1 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha - 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\det(A) = 1 - \alpha^2$$

- per $\alpha \neq \pm 1$ si mostra che $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(\tilde{A})$
quindi esiste un'unica soluzione che si può trovare in funzione di α con il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha - 1 & 0 & \alpha \\ \alpha - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha - 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

- $\alpha = 1$ si mostra che $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(\tilde{A})$
quindi esistono ∞^1 soluzioni $(-\alpha, \alpha, \alpha)$.
- $\alpha = -1$ si mostra che $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(\tilde{A}) = 3$
quindi non esistono soluzioni

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.

La risposta corretta è evidenziata in grassetto

4) (2 p.ti) La funzione $f(x) = |x - 2| + 3x$:

1. è continua e derivabile in \mathbb{R}
2. non è continua né derivabile in \mathbb{R}
3. **è continua ma non derivabile in \mathbb{R}**
4. nessuna delle precedenti

5) (2 p.ti) Se una funzione $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$ con $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$ possiamo affermare che

1. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 0$
2. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 1$
3. la funzione è decrescente $(0, 1)$
4. **esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = -1$**

6) Sia $f(x, y)$ una funzione tale che $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) = -1$, $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = 1$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -2$, il punto (x_0, y_0) è

1. **un punto di massimo**
2. un punto di sella
3. un punto di minimo
4. non si può stabilire con le informazioni date

7) (2 p.ti) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty)$ con $f(x) = x^2 - 2x$ é :

1. iniettiva e suriettiva
2. **suriettiva ma non iniettiva**
3. iniettiva ma non suriettiva
4. nessuna delle precedenti