MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, I Appello, 14/01/10, A.A. 2009/2010 - Compito 4

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Canale ☐ II (Prof. Scarlatti) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma ....

1) *(10 p.ti)* Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3+1}{x^4}$

a] Dominio e segno

Dominio:

$$D = \forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$$

Segno:

$f(x) > 0$	per	$-1 < x < 0$	$\cup$	$x > 0$
$f(x) < 0$	per	$x < -1$		
$f(x) = 0$	per	$x = -1$		

b] Limiti

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$x = 0$ asintoto verticale e $y = 0$ asintoto orizzontale

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$f'(x) = -\frac{x^3+4}{x^5}$

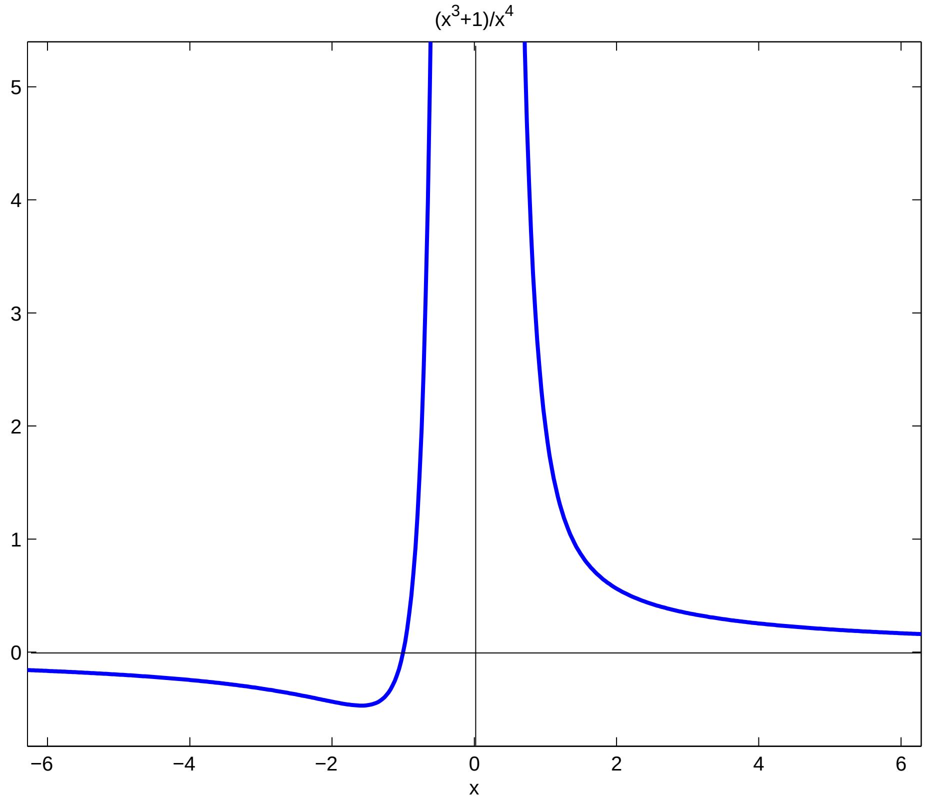
un punto stazionario: $f'(x) = 0$ per $x = \sqrt[3]{-4}$

d] Studio massimi e minimi

$f'(x) < 0$	funzione decrescente per	$x < \sqrt[3]{-4}$	$\cup$	$x > 0$
$f'(x) > 0$	funzione crescente per	$\sqrt[3]{-4} < x < 0$		

$x = \sqrt[3]{-4}$ punto di minimo

$f(\sqrt[3]{-4}) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ valore minimo



2) *(6 p.ti)* Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \log(x)dx$$

Si applica una volta il metodo di integrazione per parti :

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad f(x) = 2\sqrt{x}$

$g(x) = \log x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \log(x)dx = 2\sqrt{x}\log x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + c$$

quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \log(x)dx = 2\sqrt{2}(\log 2 - 2) + 4$$

3) *(8 p.ti)* Studiare al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} \beta y + z = \beta + 1 \\ -x - z = -1 - \beta \\ -y - \beta z = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -\beta \end{pmatrix} \tag{1}$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 1 & \beta+1 \\ -1 & 0 & -1 & -\beta-1 \\ 0 & -1 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$det(A) = 1 - \beta^2$

- per $\beta \neq \pm 1$ si mostra che $rango(A) = 3 = rango(\tilde{A})$
  quindi esiste un'unica soluzione che si può trovare in funzione di β con il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \beta+1 & \beta & 1 \\ -\beta-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -\beta \end{vmatrix}}{1-\beta^2} = -\frac{\beta}{1+\beta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta+1 & 1 \\ -1 & -\beta-1 & -1 \\ 0 & 0 & -\beta \end{vmatrix}}{1-\beta^2} = -\frac{\beta}{1-\beta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta & \beta+1 \\ -1 & 0 & -\beta-1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta}$$

- $\beta = -1$ si mostra che $rango(A) = 2 = rango(\tilde{A})$
  quindi esistono ∞^1 soluzioni $(-\alpha, \alpha, \alpha)$.
- $\beta = 1$ si mostra che $rango(A) = 2 \neq rango(\tilde{A}) = 3$
  quindi non esistono soluzioni

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.
La risposta corretta è evidenziata in grassetto

4) *(2 p.ti)* La funzione $f : \mathbb{R} \to [-1, +\infty)$ con $f(x) = x^2 - 2x$ é :

1. **suriettiva ma non iniettiva**
2. iniettiva e suriettiva
3. iniettiva ma non suriettiva
4. nessuna delle precedenti

5) *(2 p.ti)* La funzione $f(x) = |x - 2| + 3x$:

1. non è continua né derivabile in $\mathbb{R}$
2. è continua e derivabile in $\mathbb{R}$
3. **è continua ma non derivabile in** $\mathbb{R}$
4. nessuna delle precedenti

6) *(2 p.ti)* Se una funzione $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$ con $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$ possiamo affermare che

1. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 0$
2. **esiste almeno un punto** $c \in (0, 1)$ **tale che** $f'(c) = -1$
3. la funzione è decrescente $(0, 1)$
4. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 1$

7) *(2 p.ti)* Sia $f(x, y)$ una funzione tale che $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$,
$f_{xx}(x_0, y_0) = -1$, $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = 1$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -2$,
il punto (x_0, y_0) è

1. un punto di sella
2. un punto di minimo
3. **un punto di massimo**
4. non si può stabilire con le informazioni date