MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, II Appello, 26/01/10, A.A. 2009/2010 - Compito 1

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Canale ☐ II (Prof. Scarlatti) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma ....

1) *(10 p.ti)* Studiare la funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

a] Dominio:

$$D = (1, \infty)$$

Segno: Sempre positiva in D.

b] Limiti

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$x = 1$ asintoto verticale

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$f'(x) = \frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

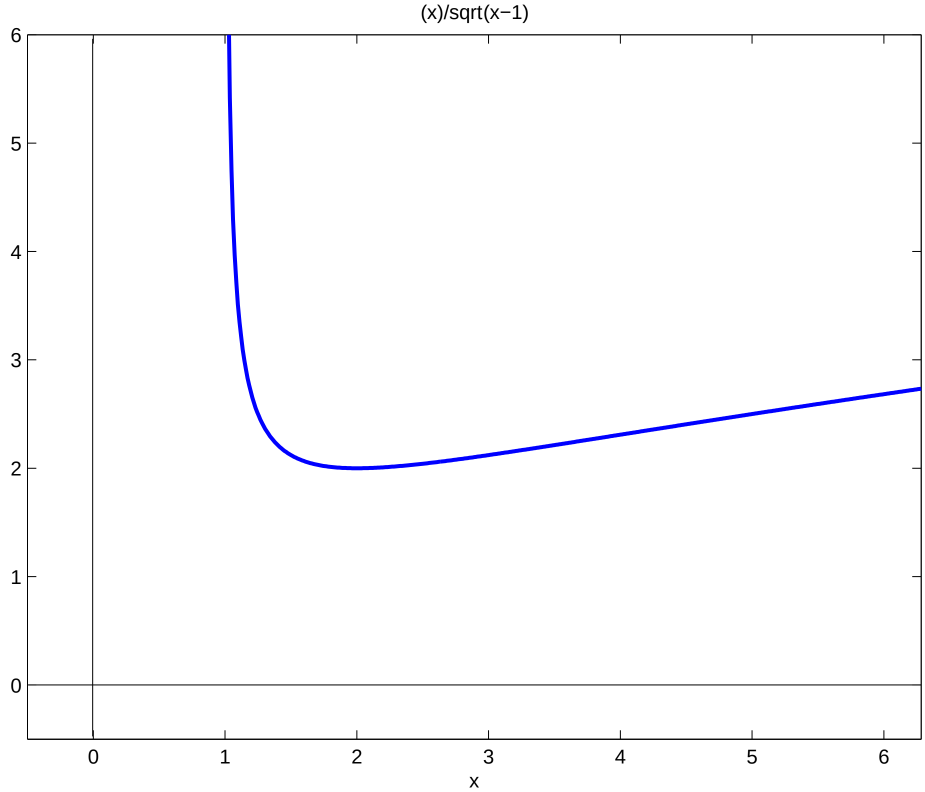
Punto stazionario $x = 2$.

d] Studio massimi e minimi

$f'(x) < 0$ funzione decrescente per $1 < x < 2$
$f'(x) > 0$ funzione crescente per $x > 2$

$x = 2$ punto di minimo

$f(2) = 2$ valore minimo



2) Rispondere ai seguenti quesiti:

- *(1 p.ti)* Quando una qualsiasi funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 interno al suo dominio?
- *(4 p.ti)* Per quale valore del parametro b la seguente funzione $f(x)$ è continua in $x_0 = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{b}{\log(2)} & x \leq 0 \\ \\ \frac{x}{2^x - 1} & x > 0 \end{cases}$$

- *(1 p.ti)* Per tale valore $f(x)$ è anche continua su tutto il suo dominio?

Soluzione:
Una funzione è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$
Si calcola

$$\lim_{x \to 0^-} 2x + \frac{b}{\log(2)} = \frac{b}{\log(2)}$$

Si calcola, usando il teorema del De l'Hopital,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2^x - 1} = \frac{1}{\log(2)}$$

Considerando che $f(0) = \frac{b}{\log(2)}$, risulta che la funzione è continua solo se $b = 1$.

Dato che $x = 0$ è l'unico punto di potenziale discontinuità (a seconda del valore di b) per la funzione, la funzione per $b = 1$ è continua in tutto $\mathcal{D}$.

3) *(8 p.ti)* Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x - y + z = k^2 - 1 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \\ z = k \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & k^2 - 1 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \tag{2}$$

La matrice dei coefficienti ha sempre rango pari a 2.

La matrice completa ha rango pari a 3 se $k \neq \pm 1$, quindi per tali valori non esiste soluzione.

Se $k = -1$ le matrici hanno entrambe rango pari a 2, esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(\alpha + 1, \alpha, -1)$.

Se $k = +1$ le matrici hanno entrambe rango pari a 2, esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(\alpha - 1, \alpha, 1)$.

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.
La risposta corretta è evidenziata in grassetto

4) *(2 p.ti)* Sia definita la funzione $F(x) = \int_0^x \log(t^2 - 2t + 2)dt$, possiamo affermare che

1. la funzione $F(x)$ è decrescente in $(0, 1)$
2. la funzione $F(x)$ ammette un punto di massimo in $x = 1$
3. **la funzione è crescente in** $(0, +\infty)$
4. nessuna delle precedenti

5) *(2 p.ti)* Se la successione $\{a_n\}$ converge a l, la successione $\{c_n\}$ converge a l' con $l < l'$ e $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, che si puó dire della successione $\{b_n\}$?

1. è inderminata
2. converge
3. diverge
4. **non si può dire nulla**

6) *(2 p.ti)* I vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono tra loro linearmente indipendenti. Allora possiamo concludere che

1. appartengono a uno spazio vettoriale di dimensione pari a 2
2. appartengono a $\mathbb{R}^2$
3. **appartengono a uno spazio vettoriale almeno di dimensione 2**
4. nessuno dei precedenti

7) *(2 p.ti)* Il limite

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. non esiste
2. vale 0
3. **vale** 1
4. vale ∞