MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, II Appello, 26/01/10, A.A. 2009/2010 - Compito 3

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Canale ☐ II (Prof. Scarlatti) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma ....

1) *(10 p.ti)* Studiare la funzione $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

a] Dominio

$D = (0, \infty)$

Segno: Sempre positiva in D.

b] Limiti

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$x = 0$ asintoto verticale

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

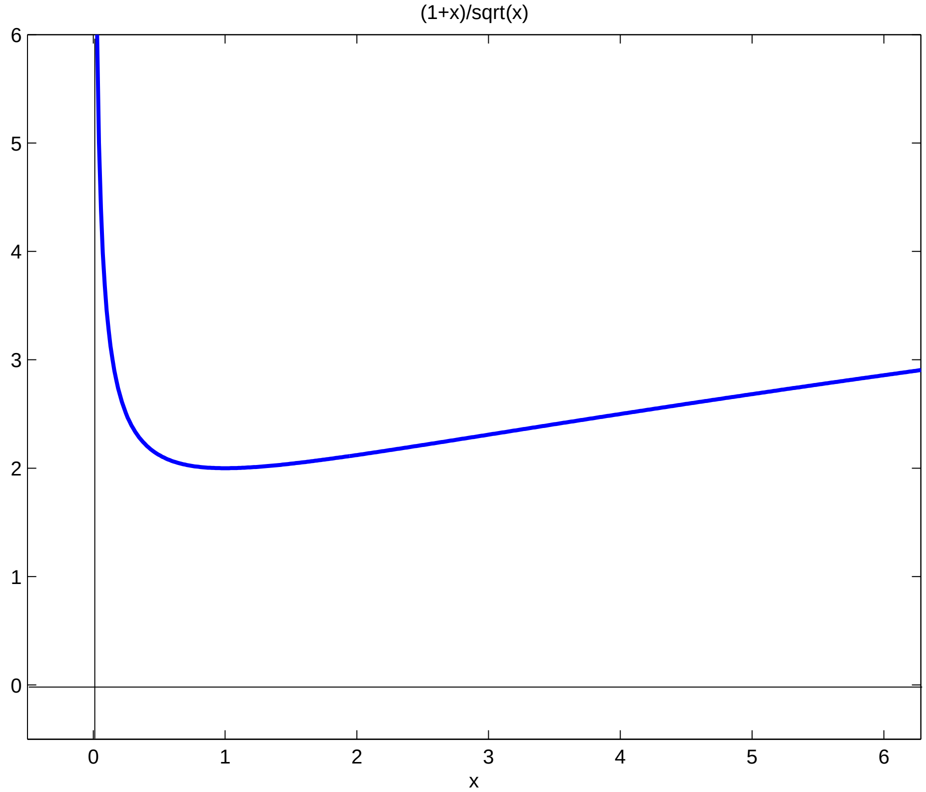
Punto stazionario $x = 1$.

d] Studio massimi e minimi

$f'(x) < 0$	funzione decrescente per	$0 < x < 1$
$f'(x) > 0$	funzione crescente per	$x > 1$

$x = 1$ punto di minimo

$f(1) = 2$ valore minimo



2) Rispondere ai seguenti quesiti:

- *(1 p.ti)* Quando una qualsiasi funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 interno al suo dominio?
- *(4 p.ti)* Per quale valore del parametro b la seguente funzione $f(x)$ è continua in $x_0 = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} x + b\log(4) & x \leq 0 \\ \frac{4^x - 1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

- *(1 p.ti)* Per tale valore $f(x)$ è anche continua su tutto il suo dominio?

Soluzione:
Una funzione è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$
Si calcola

$$\lim_{x \to 0^-} x + b\log(4) = b\log(4)$$

Si calcola, usando il teorema del De l'Hopital,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4^x - 1}{x} = \log(4)$$

Considerando che $f(0) = b\log(4)$, risulta che la funzione è continua solo se $b = 1$.

Dato che $x = 0$ è l'unico punto di potenziale discontinuità (a seconda del valore di b) per la funzione, la funzione per $b = 1$ è continua in tutto $\mathcal{D}$.

3) *(8 p.ti)* Studiare al variare del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x = \gamma \\ -3x + 3y - 3z = 0 \\ x - y + z = 1 - \gamma^2 \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma \\ -3 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1-\gamma^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

La matrice dei coefficienti ha sempre rango pari a 2.

La matrice completa ha rango pari a 3 se $\gamma \neq \pm 1$, quindi per tali valori non esiste soluzione.

Se $\gamma = -1$ le matrici hanno entrambe rango pari a 2, esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(-1, \alpha, \alpha + 1)$.

Se $\gamma = +1$ le matrici hanno entrambe rango pari a 2, esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(1, \alpha, \alpha - 1)$.

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.
La risposta corretta è evidenziata in grassetto

4) *(2 p.ti)* I vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono tra loro linearmente indipendenti. Allora possiamo concludere che

1. **appartengono a uno spazio vettoriale almeno di dimensione 2**
2. appartengono a uno spazio vettoriale di dimensione pari a 2
3. appartengono a $\mathbb{R}^2$
4. nessuno dei precedenti

5) *(2 p.ti)* Il limite

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. vale ∞
2. non esiste
3. vale 0
4. **vale** 1

6) *(2 p.ti)* Sia definita la funzione $F(x) = \int_0^x \log(t^2 - 2t + 2)dt$, possiamo affermare che

1. la funzione $F(x)$ ammette un punto di massimo in $x = 1$
2. la funzione $F(x)$ è decrescente in $(0, 1)$
3. **la funzione è crescente in** $(0, +\infty)$
4. nessuna delle precedenti

7) *(2 p.ti)* Se la successione $\{a_n\}$ converge a l, la successione $\{c_n\}$ converge a l' con $l < l'$ e $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, che si puó dire della successione $\{b_n\}$?

1. diverge
2. è inderminata
3. converge
4. **non si può dire nulla**