MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, I Appello, 14/01/10, A.A. 2009/2010 - Compito 1

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Canale ☐ II (Prof. Scarlatti) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma ....

1) *(10 p.ti)* Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3-1}{x^4}$

a] Dominio e segno

Dominio:

$$D = \forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$$

Segno:

$f(x) < 0$	per	$x < 0$	$\cup$	$0 < x < 1$
$f(x) > 0$	per	$x > 1$		
$f(x) = 0$	per	$x = 1$		

b] Limiti

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$x = 0$ asintoto verticale e $y = 0$ asintoto orizzontale

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$f'(x) = \frac{-x^3+4}{x^5}$

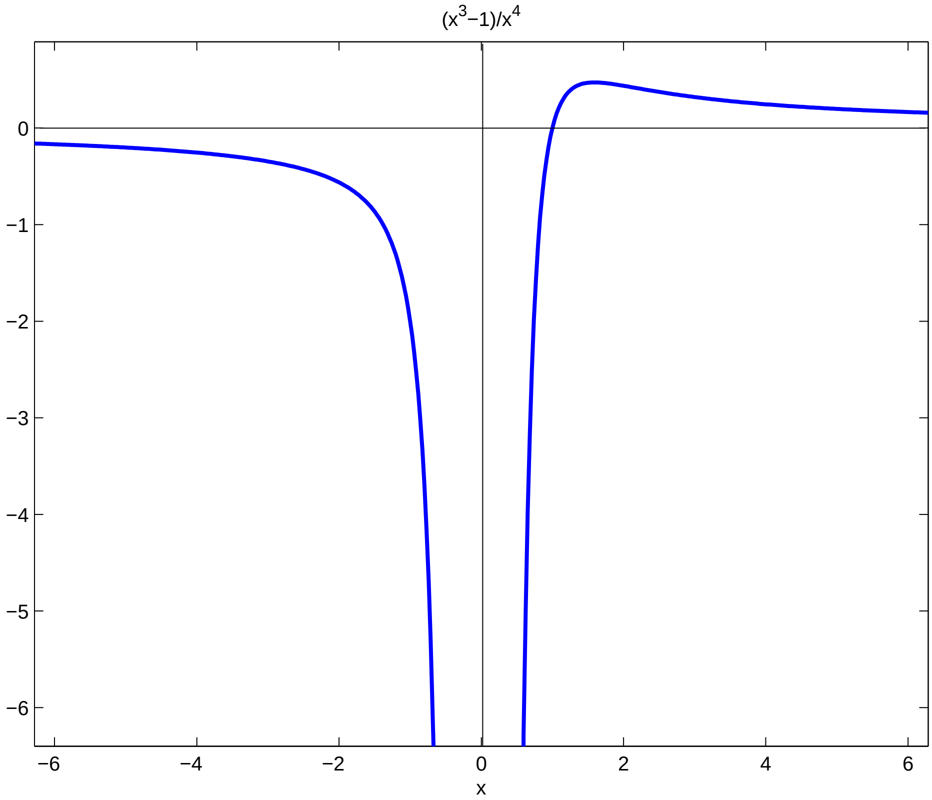
un punto stazionario: $f'(x) = 0$ per $x = \sqrt[3]{4}$

d] Studio massimi e minimi

$f'(x) < 0$	funzione decrescente per	$x < 0$	$\cup$	$x > \sqrt[3]{4}$
$f'(x) > 0$	funzione crescente per	$0 < x < \sqrt[3]{4}$		

$x = \sqrt[3]{4}$ punto di massimo

$f(\sqrt[3]{4}) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ valore massimo



2) *(6 p.ti)* Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^{-x} x^2 dx$$

Si applica due volte il metodo di integrazione per parti :

prima volta:

$f'(x) = e^{-x} \qquad f(x) = -e^{-x}$
$g(x) = x^2 \qquad g'(x) = 2x$

$$\int e^{-x} x^2 dx = -e^{-x} x^2 - 2 \int -e^{-x} x dx$$

seconda volta:

$f'(x) = -e^{-x} \qquad f(x) = e^{-x}$
$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$$\int e^{-x} x^2 dx = -e^{-x} x^2 - 2 \int -e^{-x} x dx = -e^{-x} x^2 - 2 \left[e^{-x} x - \int e^{-x} dx \right] = -e^{-x} [x^2 + 2x + 2] + c$$

quindi

$$\int_0^1 e^{-x} x^2 dx = 2 - \frac{5}{e}$$

3) *(8 p.ti)* Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} kx + z = k - 1 \\ y + z = k - 1 \\ x + kz = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \tag{1}$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$det(A) = k^2 - 1$

- per $k \neq \pm 1$ si mostra che $rango(A) = 3 = rango(\tilde{A})$

  quindi esiste un'unica soluzione che si può trovare in funzione di k con il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}}{k^2 - 1} = \frac{k}{k+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & k-1 & 1 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix}}{k^2 - 1} = \frac{k^2}{k+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & k-1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{k^2 - 1} = -\frac{1}{k+1}$$

- $k = 1$ si mostra che $rango(A) = 2 = rango(\tilde{A})$

  quindi esistono ∞^1 soluzioni $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$.

- $k = -1$ si mostra che $rango(A) = 2 \neq rango(\tilde{A}) = 3$

  quindi non esistono soluzioni

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.
La risposta corretta è evidenziata in grassetto

4)*(2 p.ti)* Sia $f(x,y)$ una funzione tale che $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$, $f_{xx}(x_0,y_0)=-1$, $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)=1$, $f_{yy}(x_0,y_0)=-2$, il punto (x_0,y_0) è

1. un punto di minimo
2. **un punto di massimo**
3. un punto di sella
4. non si può stabilire con le informazioni date

5)*(2 p.ti)* La funzione $f:\mathbb{R}\rightarrow[-1,+\infty)$ con $f(x)=x^2-2x$ é :

1. iniettiva ma non suriettiva
2. iniettiva e suriettiva
3. **suriettiva ma non iniettiva**
4. nessuna delle precedenti

6) *(2 p.ti)* La funzione $f(x)=|x-2|+3x$:

1. è continua e derivabile in $\mathbb{R}$
2. **è continua ma non derivabile in** $\mathbb{R}$
3. non è continua né derivabile in $\mathbb{R}$
4. nessuna delle precedenti

7) *(2 p.ti)* Se una funzione $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ è continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$ con $f(0)=2$ e $f(1)=1$ possiamo affermare che

1. la funzione è decrescente $(0,1)$
2. **esiste almeno un punto** $c\in(0,1)$ **tale che** $f'(c)=-1$
3. esiste almeno un punto $c\in(0,1)$ tale che $f'(c)=0$
4. esiste almeno un punto $c\in(0,1)$ tale che $f'(c)=1$