

**MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV**  
Sessione Invernale, I Appello, 14/01/10, A.A. 2009/2010 - Compito 2

Cognome ..... Nome ..... Matricola .....

Canale     II (Prof. Scarlatti)                     III (Prof.ssa Fabretti)                     IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma .....

1) (10 p.ti) Studiare la funzione  $f(x) = \frac{-x^3-1}{x^4}$

a] Dominio e segno

Dominio:

$$D = \forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$$

Segno:

$$\begin{array}{llll} f(x) < 0 & \text{per} & -1 < x < 0 & \cup & x > 0 \\ f(x) > 0 & \text{per} & x < -1 & & \\ f(x) = 0 & \text{per} & x = -1 & & \end{array}$$

b] Limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$x = 0$  asintoto verticale e  $y = 0$  asintoto orizzontale

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$$f'(x) = \frac{x^3+4}{x^5}$$

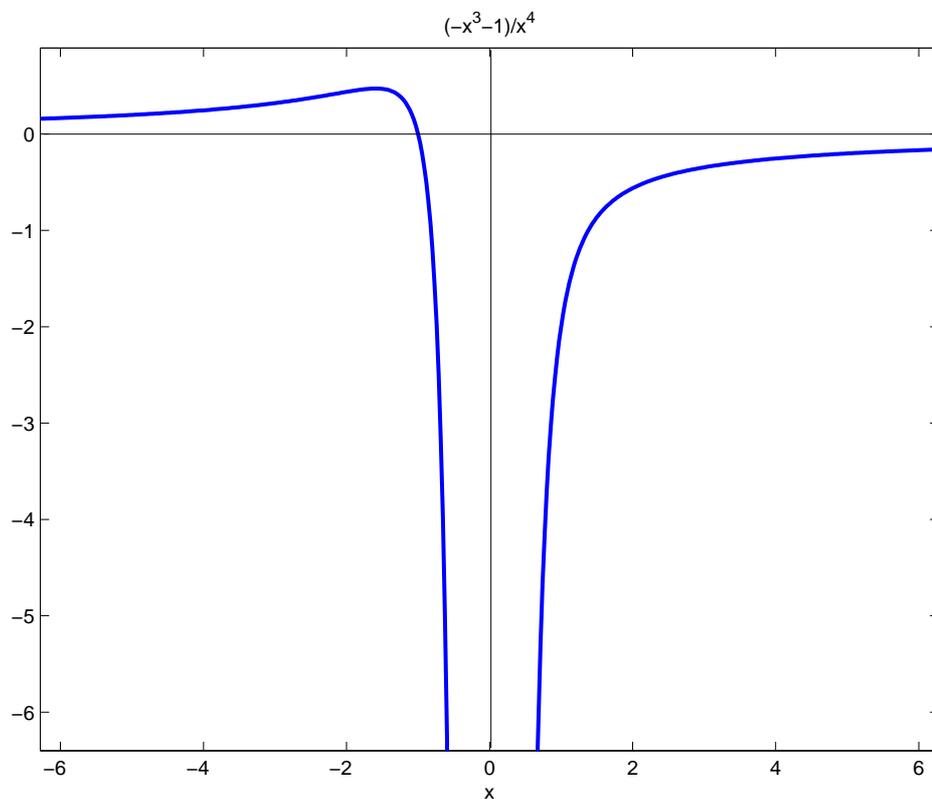
un punto stazionario:  $f'(x) = 0$  per  $x = \sqrt[3]{-4}$

d] Studio massimi e minimi

$$\begin{array}{llll} f'(x) > 0 & \text{funzione crescente per} & x < \sqrt[3]{-4} & \cup & x > 0 \\ f'(x) < 0 & \text{funzione decrescente per} & \sqrt[3]{-4} < x < 0 & & \end{array}$$

$x = \sqrt[3]{-4}$  punto di massimo

$$f(\sqrt[3]{-4}) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \text{ valore massimo}$$



2) (6 p.ti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^x x^2 dx$$

Si applica due volte il metodo di integrazione per parti :

prima volta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x & f(x) &= e^x \\ g(x) &= x^2 & g'(x) &= 2x \end{aligned}$$

$$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - 2 \int e^x x dx$$

seconda volta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x & f(x) &= e^x \\ g(x) &= x & g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - 2 \int e^x x dx = e^x x^2 - 2 \left[ e^x x - \int e^x dx \right] = e^x [x^2 - 2x + 2] + c$$

quindi

$$\int_0^1 e^x x^2 dx = e - 2$$

3) (8 p.ti) Studiare al variare del parametro  $t \in \mathbb{R}$  le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} ty + z = t + 1 \\ x + z = t + 1 \\ y + tz = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \quad (1)$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 & t+1 \\ 1 & 0 & 1 & t+1 \\ 0 & 1 & t & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\det(A) = 1 - t^2$$

- per  $t \neq \pm 1$  si mostra che  $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(\tilde{A})$   
quindi esiste un'unica soluzione che si può trovare in funzione di  $t$  con il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t+1 & t & 1 \\ t+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix}}{1-t^2} = -\frac{t^2}{1-t}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t+1 & 1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{1-t^2} = -\frac{t}{1-t}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t & t+1 \\ 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1-t^2} = \frac{1}{1-t}$$

- $t = -1$  si mostra che  $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(\tilde{A})$   
quindi esistono  $\infty^1$  soluzioni  $(-\alpha, \alpha, \alpha)$ .
- $t = 1$  si mostra che  $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(\tilde{A}) = 3$   
quindi non esistono soluzioni

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.

**La risposta corretta è evidenziata in grassetto**

4) (2 p.ti) Se una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $[0, 1]$  e derivabile in  $(0, 1)$  con  $f(0) = 2$  e  $f(1) = 1$  possiamo affermare che

1. **esiste almeno un punto  $c \in (0, 1)$  tale che  $f'(c) = -1$**
2. la funzione è decrescente  $(0, 1)$
3. esiste almeno un punto  $c \in (0, 1)$  tale che  $f'(c) = 0$
4. esiste almeno un punto  $c \in (0, 1)$  tale che  $f'(c) = 1$

5) Sia  $f(x, y)$  una funzione tale che  $f_x(x_0, y_0) = 0$ ,  $f_y(x_0, y_0) = 0$ ,  $f_{xx}(x_0, y_0) = -1$ ,  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = 1$ ,  $f_{yy}(x_0, y_0) = -2$ , il punto  $(x_0, y_0)$  è

1. **un punto di massimo**
2. un punto di minimo
3. un punto di sella
4. non si può stabilire con le informazioni date

6) (2 p.ti) La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty)$  con  $f(x) = x^2 - 2x$  è :

1. iniettiva e suriettiva
2. iniettiva ma non suriettiva
3. **suriettiva ma non iniettiva**
4. nessuna delle precedenti

7) (2 p.ti) La funzione  $f(x) = |x - 2| + 3x$ :

1. **è continua ma non derivabile in  $\mathbb{R}$**
2. è continua e derivabile in  $\mathbb{R}$
3. non è continua né derivabile in  $\mathbb{R}$
4. nessuna delle precedenti