

MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, I Appello, 14/01/10, A.A. 2009/2010 - Compito 2

Cognome Nome Matricola

Canale ☐ II (Prof. Scarlatti) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma

1) (10 p.ti) Studiare la funzione $f(x) = \frac{-x^3-1}{x^4}$

a] Dominio e segno

Dominio:

$$D = \forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$$

Segno:

$$\begin{array}{lll} f(x) < 0 & \text{per} & -1 < x < 0 \quad \cup \quad x > 0 \\ f(x) > 0 & \text{per} & x < -1 \\ f(x) = 0 & \text{per} & x = -1 \end{array}$$

b] Limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale e $y = 0$ asintoto orizzontale

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$$f'(x) = \frac{x^3+4}{x^5}$$

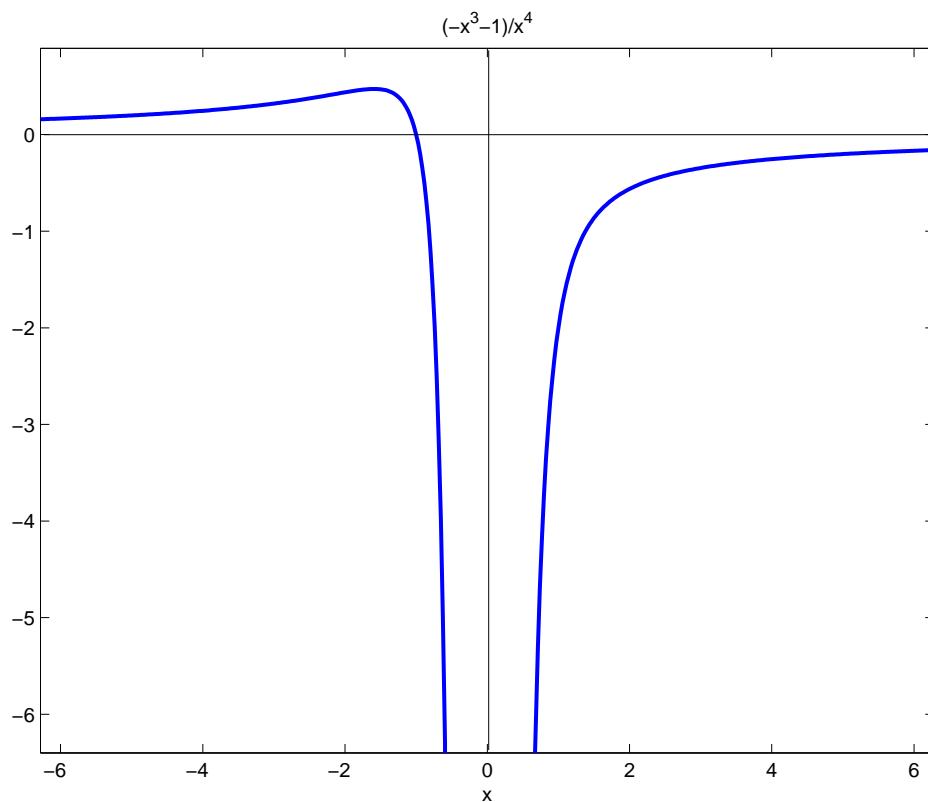
un punto stazionario: $f'(x) = 0$ per $x = \sqrt[3]{-4}$

d] Studio massimi e minimi

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \text{funzione crescente per} & x < \sqrt[3]{-4} \quad \cup \quad x > 0 \\ f'(x) < 0 & \text{funzione decrescente per} & \sqrt[3]{-4} < x < 0 \end{array}$$

$x = \sqrt[3]{-4}$ punto di massimo

$$f(\sqrt[3]{-4}) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \text{ valore massimo}$$



2) (6 p.ti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^x x^2 dx$$

Si applica due volte il metodo di integrazione per parti :

prima volta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x & f(x) &= e^x \\ g(x) &= x^2 & g'(x) &= 2x \end{aligned}$$

$$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - 2 \int e^x x dx$$

seconda volta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x & f(x) &= e^x \\ g(x) &= x & g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\int e^x x^2 dx = e^x x^2 - 2 \int e^x x dx = e^x x^2 - 2 \left[e^x x - \int e^x dx \right] = e^x [x^2 - 2x + 2] + c$$

quindi

$$\int_0^1 e^x x^2 dx = e - 2$$

3) (8 p.ti) Studiare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} ty + z = t + 1 \\ x + z = t + 1 \\ y + tz = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \quad (1)$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 & t+1 \\ 1 & 0 & 1 & t+1 \\ 0 & 1 & t & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\det(A) = 1 - t^2$$

- per $t \neq \pm 1$ si mostra che $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(\tilde{A})$
quindi esiste un'unica soluzione che si può trovare in funzione di t con il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t+1 & t & 1 \\ t+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix}}{1 - t^2} = -\frac{t^2}{1 - t}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t+1 & 1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{1 - t^2} = -\frac{t}{1 - t}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t & t+1 \\ 1 & 0 & t+1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1 - t^2} = \frac{1}{1 - t}$$

- $t = -1$ si mostra che $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(\tilde{A})$
quindi esistono ∞^1 soluzioni $(-\alpha, \alpha, \alpha)$.
- $t = 1$ si mostra che $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(\tilde{A}) = 3$
quindi non esistono soluzioni

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.

La risposta corretta è evidenziata in grassetto

4) (2 p.ti) Se una funzione $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$ con $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$ possiamo affermare che

1. **esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = -1$**
2. la funzione è decrescente $(0, 1)$
3. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 0$
4. esiste almeno un punto $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 1$

5) Sia $f(x, y)$ una funzione tale che $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) = -1$, $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = 1$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -2$, il punto (x_0, y_0) è

1. **un punto di massimo**
2. un punto di minimo
3. un punto di sella
4. non si può stabilire con le informazioni date

6) (2 p.ti) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty)$ con $f(x) = x^2 - 2x$ é :

1. iniettiva e suriettiva
2. iniettiva ma non suriettiva
3. **suriettiva ma non iniettiva**
4. nessuna delle precedenti

7) (2 p.ti) La funzione $f(x) = |x - 2| + 3x$:

1. **è continua ma non derivabile in \mathbb{R}**
2. è continua e derivabile in \mathbb{R}
3. non è continua né derivabile in \mathbb{R}
4. nessuna delle precedenti