MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, I Appello, 18/01/11, A.A. 2010/2011 - Compito 1

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Canale ☐ II (Prof. Gibilisco) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)

Firma ....

1) *(9 p.ti)* Studiare la funzione $f(x) = -\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}$

a] Dominio e segno

dominio: $D = [-1, 1] \cup (2, \infty)$

segno :$f(x)$ sempre negativa nel suo dominio D

b] Limiti e asintoti

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x^2-1}} \cdot \frac{2x(x-2) - (x^2-1)}{(x-2)^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x^2-1}} \cdot \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$f'(x)$ si annulla in $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

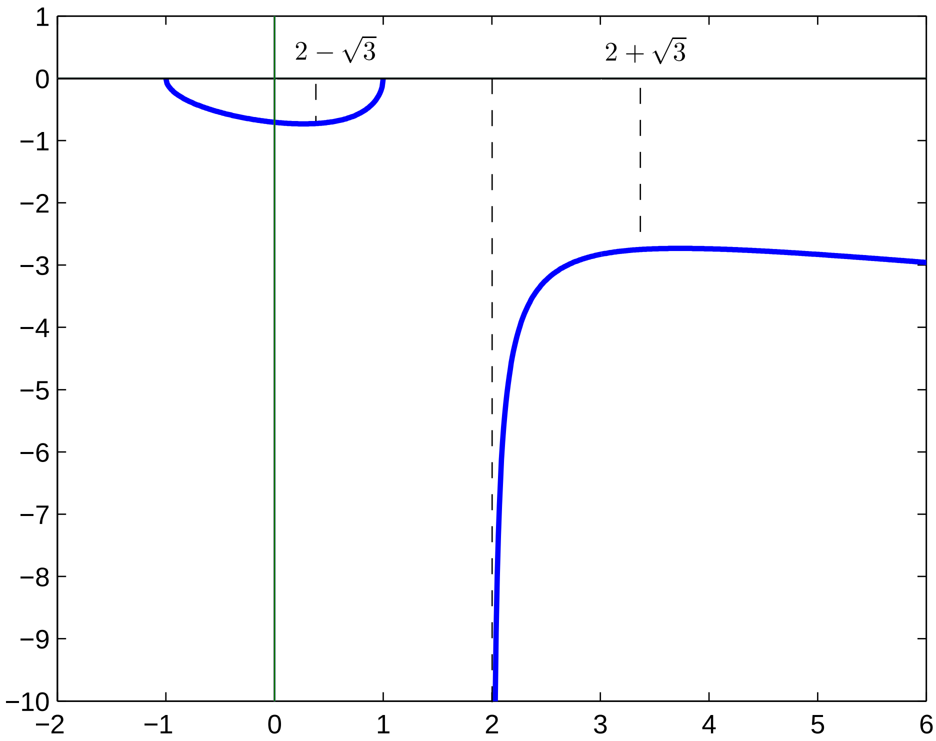
d] Studio massimi e minimi

$f'(x) < 0$ in $(-1, 2-\sqrt{3})$ e $(2+\sqrt{3}, \infty)$

$f'(x) > 0$ in $(2-\sqrt{3}, 1)$ e $(2, 2+\sqrt{3})$

$f(x)$ ha un minimo in $x = 2-\sqrt{3}$ e un massimo in $x = 2+\sqrt{3}$

e] Grafico (lo studio di eventuali flessi è opzionale).



2) *(5 p.ti)* Calcolare

$$\int 2x^2(e^{(-4x^3+1)} + 2x)dx$$

Soluzione: si può spezzare in due integrali di quasi immediata risoluzione

$$\int 2x^2 e^{(-4x^3+1)}dx + \int 4x^3 dx$$

il primo si risolve usando

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

il secondo si risolve usando

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

con opportuni aggiustamenti delle costanti la soluzione risulta

$$-\frac{1}{6}e^{(-4x^3+1)} + x^4 + c$$

3) *(7 p.ti)* Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} k^2 x - z = 1 \\ x - z = k \end{cases}$$

Soluzione:
Matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} k^2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice A è $1 - k^2$ e si annulla in $k = \pm 1$.

Se $k \neq \pm 1$ la matrice A e la matrice $\tilde{A}$ hanno rango uguale, pari a 2. Per il Teorema di Rouche Capelli esiste un'unica soluzione:

$$x = -\frac{1}{k+1} \qquad\qquad z = -\frac{k^2 + k + 1}{k+1}$$

Se $k = 1$ la matrice A e la matrice $\tilde{A}$ hanno rango uguale, pari a 1. Per il Teorema di Rouche Capelli esistono ∞^1 soluzioni:

$$(x, z) = (1 + t, t) \qquad \text{con} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Se $k = -1$ la matrice A ha rango 1 e la matrice $\tilde{A}$ ha rango pari a 2. Per il Teorema di Rouche Capelli non esistono soluzioni.

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti, l'ultima domanda vale 2 punti.

4) *(2 p.ti)* Sia definita la funzione $f(x) = x - \log(|x-4|)$. Possiamo affermare che il suo dominio è

1. $(4, +\infty)$
2. $[4, +\infty)$
3. $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ ✓

5) *(2 p.ti)* Se la successione $\{a_n\}$ converge a l e $|b_n| \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si puó affermare che la successione $\{b_n\}$ converge.

□ Vero ✓ Falso

6) *(2 p.ti)* Assegnati i vettori $\mathbf{v} = (-1, 2, 0), \mathbf{w} = (-8, 16, 0)$, possiamo concludere che

1. $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti;
2. $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti; ✓
3. $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ generano uno spazio vettoriale di dimensione 2.

7) *(2 p.ti)* Sia definita la funzione $F(x) = \int_1^x \frac{2-t}{\log(t^2+1)} dt$, possiamo affermare che

1. la funzione $F(x)$ è crescente in $(1, 2)$; ✓
2. la funzione $F(x)$ è decrescente in $(1, 2)$;
3. la funzione $F(x)$ non è né crescente né decrescente in $(1, 2)$.

8) *(2 p.ti)* Scrivere la formula del polinomio di Taylor di grado n per una arbitraria funzione f in un punto x_0. Calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione $f(x) = \log(x+3)$ in $x_0 = -1$.

Per la formula del polinomio di Taylor di grado n per una arbitraria funzione f in un punto x_0 vedere libro di testo, appunti, etc.

Per la seconda parte della domanda la risposta è

$$P_2(x) = \log 2 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{8}(x+1)^2$$