

MATEMATICA GENERALE - Canali II, III, IV

Sessione Invernale, I Appello, 18/01/11, A.A. 2010/2011 - Compito 3

Cognome Nome Matricola
Canale ☐ II (Prof. Gibilisco) ☐ III (Prof.ssa Fabretti) ☐ IV (Prof.ssa Tessitore)
Firma

1) (9 p.ti) Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{2-x}}$

a] Dominio e segno

dominio: $D = [-1, 1] \cup (2, \infty)$

segno : $f(x)$ sempre positiva nel suo dominio D

b] Limiti e asintoti

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-x}{1-x^2}} \cdot \frac{-2x(2-x) - (x^2-1)}{(2-x)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-x}{1-x^2}} \cdot \frac{x^2-4x+1}{(2-x)^2}$$

$f'(x)$ si annulla in $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

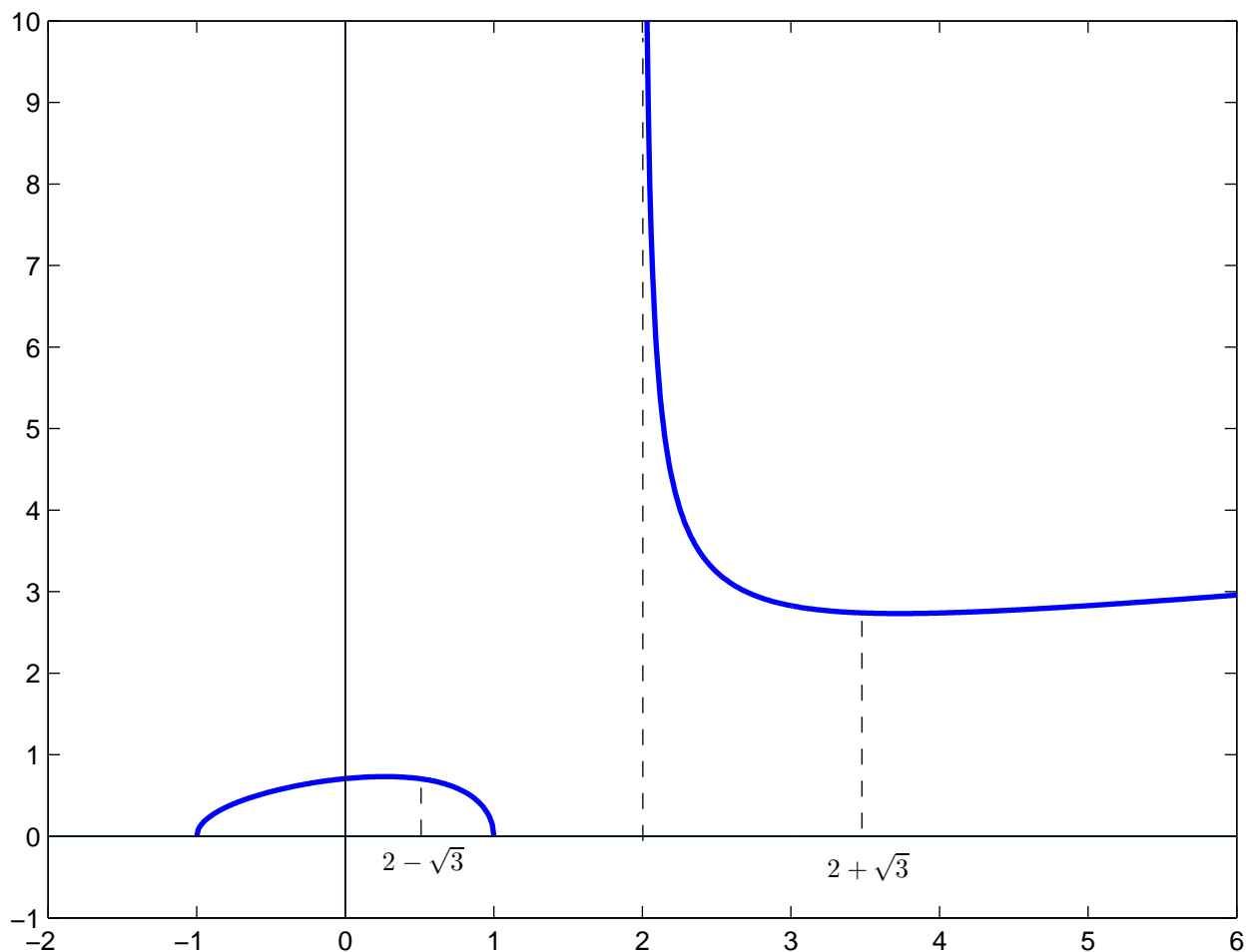
d] Studio massimi e minimi

$f'(x) > 0$ in $(-1, 2 - \sqrt{3})$ e $(2 + \sqrt{3}, \infty)$

$f'(x) < 0$ in $(2 - \sqrt{3}, 1)$ e $(2, 2 + \sqrt{3})$

$f(x)$ ha un massimo in $x = 2 - \sqrt{3}$ e un minimo in $x = 2 + \sqrt{3}$

e] Grafico (lo studio di eventuali flessi è opzionale).



2) (5 p.ti) Calcolare

$$\int 3x(e^{-3x^2+1} - 4x^2)dx$$

Soluzione: si può spezzare in due integrali di quasi immediata risoluzione

$$\int 3xe^{(-3x^2+1)}dx - \int 12x^3dx$$

il primo si risolve usando

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

il secondo si risolve usando

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

con opportuni aggiustamenti delle costanti la soluzione risulta

$$-\frac{1}{2}e^{(-3x^2+1)} - 3x^4 + c$$

3) (7 p.ti) Studiare al variare del parametro $r \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x - z = r \\ x - r^2 z = -1 \end{cases}$$

Soluzione:

Matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -r^2 \end{pmatrix}$$

Matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & r \\ 1 & -r^2 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice A è $1 - r^2$ e si annulla in $r = \pm 1$.

Se $r \neq \pm 1$ la matrice A e la matrice \tilde{A} hanno rango uguale, pari a 2. Per il Teorema di Rouché Capelli esiste un'unica soluzione:

$$x = -\frac{r^3 + 1}{1 - r^2} \qquad z = -\frac{1 + r}{1 - r^2}$$

Se $r = -1$ la matrice A e la matrice \tilde{A} hanno rango uguale, pari a 1. Per il Teorema di Rouché Capelli esistono ∞^1 soluzioni:

$$(x, z) = (t - 1, t) \qquad \text{con} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Se $r = +1$ la matrice A ha rango 1 e la matrice \tilde{A} ha rango pari a 2. Per il Teorema di Rouché Capelli non esistono soluzioni.

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti, l'ultima domanda vale 2 punti.

4) (2 p.ti) Se la successione $\{a_n\}$ converge a l e $|b_n| \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$, si può affermare che la successione $\{b_n\}$ converge.

☐ Vero

☒ Falso

5) (2 p.ti) Sia definita la funzione $f(x) = x - \log(|x - 4|)$. Possiamo affermare che il suo dominio è

1. $(4, +\infty)$

2. $[4, +\infty)$

3. $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ ✓

6) (2 p.ti) Sia definita la funzione $F(x) = \int_1^x \frac{2-t}{\log(t^2+1)} dt$, possiamo affermare che

1. la funzione $F(x)$ è crescente in $(1, 2)$; ✓

2. la funzione $F(x)$ è decrescente in $(1, 2)$;

3. la funzione $F(x)$ non è né crescente né decrescente in $(1, 2)$.

7) (2 p.ti) Assegnati i vettori $\mathbf{v} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (-8, 16, 0)$, possiamo concludere che

1. \mathbf{v} e \mathbf{w} sono linearmente indipendenti;

2. \mathbf{v} e \mathbf{w} sono linearmente dipendenti; ✓

3. \mathbf{v} e \mathbf{w} generano uno spazio vettoriale di dimensione 2.

8) (2 p.ti) Scrivere la formula del polinomio di Taylor di grado n per una arbitraria funzione f in un punto x_0 . Calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione $f(x) = \log(x + 3)$ in $x_0 = -1$.

Per la formula del polinomio di Taylor di grado n per una arbitraria funzione f in un punto x_0 vedere libro di testo, appunti, etc.

Per la seconda parte della domanda la risposta è

$$P_2(x) = \log 2 + \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{8}(x + 1)^2$$