**ESERCIZI MATEMATICA GENERALE - Canale III**

Prof. A. Fabretti[1] A.A. 2009/2010

Individuare il dominio e i punti stazionari delle seguenti funzioni a due variabili

**1)** $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 3xy$

**2)** $f(x,y) = e^y e^x - x - y$

**3)** $f(x,y) = \log(x^2 + 2(y-4)^2)$

**4)** $f(x,y) = exp(\sqrt{1 - x^2 - y^2})$

**5)** $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$

**6)** $f(x,y) = \frac{4}{3}x^3 - xy^2 - y$

**7)** $f(x,y) = y^4 x^3 - xy + 1$

**8)** $f(x,y) = \log\left(\frac{1-x^2+y^2}{1-x^2-y^2}\right)$.

**9)** $f(x,y) = \log\sqrt{xy}$

**10)** $f(x,y) = \frac{xy}{2-(xy)^2}$

Problemi di ottimo con vincolo

**1)** $\begin{cases} f(x,y) = (x-y)e^{-(x+y)^2} \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} f(x,y) = xy + 2x - 3 \\ y = x \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} f(x,y) = \log x + \frac{y}{2}\sqrt{x} \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$

**4)** $\begin{cases} f(x,y) = x + \log y \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

**5)** $\begin{cases} f(x,y) = x^2 y \\ 2x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

[1]Si prega di segnalare errori o imprecisioni a *annalisa.fabretti@uniroma2.it*

**Esercizi**

**1)**Data la funzione di utilità $f(x, y) = -e^{-(x+y)}$ trovare le curve di indifferenza rispetto ad una utilità pari a $k$ con $k \in \mathbb{R}$.

**2)**Data la funzione $f(x, y) = 2x^2 + yx^3 - y^3$ trovare il suo piano tangente in $(1, 1)$.

**3)**Data la funzione $f(x, y) = log(x^2 + y^2 - 4)$ definire il dominio e disegnare le curve di livello.

**4)**Disegnare le curve di livello della funzione $f(x, y) = e^{x+y}$.

**5)**Determinare la massima e la minima distanza dall'origine dei punti della circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

**6)**La signora Viola associa al consumo di una quantità $x$ del bene $A$ e di una quantità $y$ del bene $B$ la funzione soddisfazione $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$. Considerando che la signora possiede un ammontare di 120 euro per l'acquisto complessivo dei due beni e che i prezzi dei beni sono 10 e 5 euro rispettivamente per il bene $A$ e il bene $B$, trovare i valori di $x$ e $y$ che maggiormente danno soddisfazione alla signora consideranto i suoi limiti di budget.

**7)** Considerare la funzione di produzione $Q(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ con $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ (produzione unitaria) e $L$ e $K$ fattori di produzione (per esempio $L$ lavoro e $K$ capitale).
La produttività marginale rispetto al fattore $L$ è definita come $\frac{\partial Q}{\partial L}$, trovare la produttività marginale della funzione di produzione data rispetto a $L$ e $K$, verificare che $Q$ è una funzione crescente rispetto ai singoli fattori di produzione e verificare che le produttività marginali sono decrescenti.

**Domande teoriche**

1) Definire il concetto di curva di livello, fare degli esempi.
2) Definizione di derivata parziale.
3) Commentare il concetto di curva di indifferenza in economia.
4) Enunciare il teorema di Scharwz.
5) Definizione di intorno del punto $(x_0, y_0)$ di raggio $\delta$ in $\mathbb{R}^2$.
6) Dare la definizione di funzione a due variabili continua in $(x_0, y_0)$.
7) Data la funzione $g(x, y)$, scrivere l'equazione del piano tangente in $(x_1, y_1)$.
8) Data la funzione $u(x, y)$, scrivere lo sviluppo di Taylor del secondo ordine in $(x_1, y_1)$.
9) Data la funzione $f(x, y)$ e il vincolo $g(x, y)$ scrivere la Lagrangiana associata al problema di ottimo vincolato.
10) Definizione di punto stazionario.
11) Spiegare come riconoscere se un punto stazionario è un massimo, un minimo o un punto di sella.

**Domande teoriche, risposta multipla**

1) Se $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$

1. è derivabile in $(0,0)$
2. ammette limite in $(0,0)$ pari a $f(0,0)$
3. ammette un massimo in $(0,0)$
4. ammette limite in $(0,0)$ pari a 0

2) Se la funzione $f(x,y)$ ha derivate parziali di ordine 1 nulle in $(x_0,y_0)$, il punto $(x_0,y_0)$ è un punto di

1. massimo
2. minimo
3. sella
4. nessuna delle precedenti

3) Se la funzione $f(x,y)$ ha derivate parziali di ordine 1 nulle in $(x_1,y_1)$, il punto $(x_1,y_1)$ è

1. un punto stazionario
2. un punto di discontinuità
3. un punto di sella
4. nessuna delle precedenti

4) Sia $f(x,y)$ una funzione tale che $f_x(1,1)=0$, $f_y(1,1)=0$, $f_{xx}(1,1)=2$, $f_{xy}(1,1)=f_{yx}(1,1)=1$, $f_{yy}(1,1)=-2$, il punto $(1,1)$ è

1. un punto di minimo
2. un punto di massimo
3. un punto di sella
4. nessuna delle precedenti

5) Sia $f(x,y)$ una funzione tale che $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$, con $f_{xx}(x_0,y_0)$ e $f_{yy}(x_0,y_0)$ discordi, il punto $(x_0,y_0)$ è

1. un punto di minimo
2. un punto di massimo
3. un punto di sella
4. nessuna delle precedenti

6) Le curve di livello della funzione $f(x,y)=x^2+y^2$

1. sono circonferenze
2. sono iperboli
3. sono rette
4. nessuna delle precedenti

7) Le curve di livello della funzione $f(x,y)=x^2-y^2$

1. sono circonferenze
2. sono iperboli
3. sono rette
4. nessuna delle precedenti

8) Le curve di livello della funzione $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$

1. sono circonferenze
2. sono iperboli
3. sono rette
4. nessuna delle precedenti

9) Le curve di livello della funzione $f(x,y)=x^2+y-xy-x^3-1$

1. sono circonferenze
2. sono iperboli
3. sono rette
4. nessuna delle precedenti

10) Sia $f(x, y)$ una funzione tale che $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) = -1$, $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = 1$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -2$, il punto $(x_0, y_0)$ è

1. un punto di minimo
2. un punto di massimo
3. un punto di sella
4. non si può stabilire con le sole informazioni date

11) Sia $f(x, y)$ una funzione tale che $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) = -1$, $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = \sqrt{2}$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -2$, il punto $(x_0, y_0)$ è

1. un punto di minimo
2. un punto di massimo
3. un punto di sella
4. non si può stabilire con le sole informazioni date

12) Sia $(x_0, y_0)$ un punto stazionario per la funzione $f(x, y)$, se

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f^2_{xy}(x_0, y_0) > 0$$

possiamo affermare che

1. $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
2. $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo se $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$
3. $(x_0, y_0)$ è un punto di sella se $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$
4. $(x_0, y_0)$ è un punto di minimo se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$

13) Se $(x_0, y_0)$ è un punto stazionario per la funzione $f(x, y)$, vale che

1. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$
2. $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$
3. $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ e $f_{yy}(x_0, y_0) = 0$
4. $f_{xy}(x_0, y_0) = 0$