ESERCIZI MATEMATICA GENERALE - Canale III

Prof. A. Fabretti[1] A.A. 2009/2010

Vettori

1) Dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e $\vec{w} = (2, 2, 2)$ calcolare:
a) la combinazione lineare $-3\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w}$
b) il prodotto scalare $< \vec{u}, \vec{v} >$
c) la combinazione lineare
$< \vec{u}, \vec{v} > \vec{u} - < \vec{v}, \vec{w} > \vec{w}$
d) il vettore $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

2) Dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\vec{v} = (3, 0, 1, -1)$, $\vec{u} = (0, 0, 3, 0)$, $\vec{w} = (1, 2, 3, -2)$ e $\vec{z} = (-1, -1, 2, 2)$ calcolare:
a) $\vec{u} + \vec{w}$
b) il modulo di ogni vettore
c) $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} + 4\vec{z}$
d) $\vec{w} - \vec{z}$.

3) Dati i vettori $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 3)$, $\vec{c} = (2, 0, 2)$ e $\vec{d} = (1, 2, \frac{1}{3})$ stabilire quali tra questi vettori sono perpendicolari e quali paralleli.

4) Dati i vettori $\vec{v} = (-1, 0, 3)$, $\vec{w} = (2, -3, 6)$, $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ trovare una loro combinazione lineare nulla, cioè trovare a, b e c tali che
$a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{u} = \vec{0}$.

5) Dati i vettori $\vec{v} = (3, 4, -5)$ e $\vec{w} = (k, k - 1, 0)$, determinare i valori di k tali che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ siano ortogonali.

6) Dati i vettori $\vec{v} = (1, 0, -2, 1)$, $\vec{w} = (5, 1, 0, 3)$, $\vec{u} = (2, 1, 0, 0)$ e $\vec{z} = (-\frac{1}{5}, 3, 2, \frac{1}{7})$ stabilire se sono linearmente dipendenti o indipendenti.

7) Dati i vettori $\vec{v} = (1, -1, 1)$, $\vec{w} = (3, 2, -3)$, $\vec{u} = (0, \frac{1}{2}, 3)$ e $\vec{z} = (-1, -1, -1)$ trovare una combinazione lineare tale che $a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{u} = \vec{z}$.

8) Dati i vettori $\vec{v} = (2, 1)$, $\vec{w} = (1, 0)$, $\vec{z} = (-1, 1)$ verificare che i vettori sono linearmente dipendenti e trovare una combinazione lineare tale che $a\vec{v} + b\vec{w} = \vec{z}$.

9) Dati i vettori $\vec{v} = (0, 1, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 0)$, e $\vec{z} = (t, -t, 1)$ determinare t in modo che risultino linearmente dipendenti tra loro.

[1]Si prega di segnalare errori o imprecisioni a *annalisa.fabretti@uniroma2.it*

Matrici

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare:
a) $A + B - C$
b) $2A + 2B - 3C$.

2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcolare AB e BA.

3) Calcolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

4) Sia D la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare:
a) la matrice trasposta D'
b) DD'
c) $D'D$
d) D^2
e) D^3.

5) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

determinare gli elementi di B in modo che $AB = I$.

6) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{13}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare: $AB + C$, $A - BC$, $B - 3AC$.
Calcolare il determinante di ogni matrice e i determinanti delle matrici prodotto AB,AC,BC.

7) Calcolare i determinanti delle seguenti matrici quadrate:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 14 & 7 & 1 \\ 12 & 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{13}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 5 & 0 \\ 7 & -\frac{2}{5} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} & 1 & -2 \\ 8 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & 3 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

8) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolare il determinante di AB.

9) Data la matrice

$$D = \begin{pmatrix} t & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & t-1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare t tale che il determinante di D sia nullo.

10) Dati i vettori $\vec{v} = (3, -1, 1)$, $\vec{w} = (3, 0, -3)$, $\vec{u} = (0, \frac{1}{2}, 3)$ e $\vec{z} = (1, -1, -1)$ stabilire quanti e quali di questi vettori sono linearmente indipendenti.

11) Date le matrici dell'esercizio 1 calcolare le matrici
$AB' - BC'$, $B'C$ e $A'B - C'A$
e i loro determinanti.

12) Stabilire il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 10 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

13) Discutere il rango della matrice A al variare del parametro k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k & 6 \\ 0 & 2k & -\frac{1}{2} & 5 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

14) Siano A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

determinare X tale che $AX = B$.

15) Studiare il rango della matrice al variare di β

$$D = \begin{pmatrix} \beta & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

16) Per quali valori del parametro k le seguenti matrici hanno lo stesso rango?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & k \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare le soluzioni (se esistono) del sistema

1)

$$\begin{cases} 2x + y & = 3 \\ x - 2y & = 1 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x - 2y + z & = 1 \\ 3x + y - z & = 4 \\ 4x - 2y + 3z & = 0 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} 4x + y & = 5 \\ 3x - 7y & = 0 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} 5x + z & = 2 \\ 3y - z & = 4 \\ x + y - z & = 3 \end{cases}$$

Studiare l'esistenza delle soluzioni al variare del parametro (k, λ, γ, α, β, c e t)

1)

$$\begin{cases} x + y + z + w & = 0 \\ x + y + z - \alpha w & = \alpha \\ 2x - y + 3w & = 0 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} kx + y - z & = 1 \\ x - 2y + kz & = 0 \\ 2x - y + z & = 1 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} x + (\alpha - 1)y - z & = 2 \\ 4x - \alpha z & = 0 \\ x + y - 3z & = 1 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} tx + y & = 1 \\ x - y + 2z & = 3 \\ 4x + y - z & = 1 \end{cases}$$

5)

$$\begin{cases} 2x + y + (\beta+2)z & = 0 \\ \beta x + y + z & = 1 \\ \beta x + \beta y + \beta z & = 0 \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} x + z & = 0 \\ \beta x + y - z & = 1 \\ \beta y - 2z & = 0 \end{cases}$$

7)

$$\begin{cases} x + cy + z & = 0 \\ cx + cz & = 1 \\ y + cz & = 0 \end{cases}$$

8)

$$\begin{cases} x - y & = z \\ z & = 1 - 2\beta x \\ z & = \beta y \end{cases}$$

9)

$$\begin{cases} -x + y + z & = 0 \\ \gamma x + z & = 1 \\ \gamma y - z & = 0 \end{cases}$$

10)

$$\begin{cases} \alpha x + y - z & = 0 \\ x + 2y + z & = -\alpha \\ x + y - 2\alpha z & = \alpha \end{cases}$$

11)

$$\begin{cases} 2x + 3ty - 2z & = 0 \\ x + y + z & = t \end{cases}$$

Esercizi

Una operazione finanziaria si distingue per un vettore di tempi, detto scadenzario e un vettore di importi (in entrata o in uscita) detto flusso di cassa. Nei seguenti esercizi ogni operazione/investimento/progetto proposto deve essere visto in forma vettoriale e il problema va risolto riportando tutti i progetti su uno scadenzario comune e usando quindi l'algebra dei vettori.

1) Sia A un progetto di investimento che prevede uno scadenzario $\mathbf{t}_A = (0, 1, 2, 4, 7)$ e un flusso di cassa $\mathbf{C}_A = (-1000, 500, 500, 300, 400)$ e sia B il progetto di finanziamento che prevede uno scadenzario $\mathbf{t}_B = (0, 1, 2, 3, 4)$ e un flusso di cassa $\mathbf{C}_B = (1000, -300, -300, -300, -300)$.
Scrivere lo scadenzario e il flusso di cassa del progetto completo $A + B$.

2) Il signor Leo riscuote ogni mese una pensione di 1200 Euro, paga bimestralmente un mutuo di 1500 Euro e semestralmente riceve il canone di affitto di un magazzino pari a Euro 3000. Scrivere lo scadenzario e il flusso di cassa del signor Leo per un intero anno.

3) La signora Sara avendo a disposizione un capitale da investire può scegliere tra i seguenti titoli:
Titolo A: esborso iniziale di 1150 Euro, incassi semestrali di 40 Euro per 3 anni e rimborso di capitale a scadenza di 1000 Euro.
Titolo B: esborso iniziale di 97 Euro e incasso dopo un anno di 100 Euro.
Titolo C: esborso iniziale di 5100 Euro, incassi annuali di 250 e rimborso a scadenza dopo 3 anni di 5000 Euro.
Sapendo che la signora decide di comporre il suo portafoglio con 4 titoli di tipo A, 20 di tipo B e 2 di tipo C, scrivere lo scadenzario e il flusso di cassa del portafoglio.

4) In un magazzino sono tenute le scorte di un negozio di 3 prodotti X, Y e Z. Il capo magazzino ha il compito di mantenere costante la quantità di scorta di ciascun prodotto pari rispettivamente a 100 unità di prodotto X, 200 di prodotto Y e 1000 di prodotto Z. L'ultima richiesta fatta dal negozio al magazzino è stata di 51 unità di prodotto X, 28 di Y e 516 di Z. Sapendo che il prodotto X costa al magazzino 115 Euro, il prodotto Y costa 30 e che Z costa 15, quanto deve spendere il magazzino per riportare le scorte al livello desiderato?

5) Un paniere di beni è composto da 3 unità del primo bene, 2 del secondo, 4 del terzo e 1 del quarto. Il vettore dei prezzi dei beni è $(10, 12, 3, 5)$. Calcolare il costo del paniere.
Dato che si vogliono riaggiustare i prezzi in modo da limitare il prezzo complessivo del paniere a 60 Euro e sapendo che si può agire solo sui beni 2 e 4, come va riaggiustato il vettore dei prezzi?

6) Un industria farmaceutica produce 3 farmaci distinti in 3 distinti stabilimenti. La produzione dello stabilimento A è data dal vettore $(20, 10, 5)$, quella dello stabilimento B è $(10, 5, 15)$ e quella di C è di $(15, 20, 10)$. Supponendo che la dirigenza dell' industria vuole ottenere un ricavo in migliaia di Euro rispettivamente, dai 3 stabilimenti, di $(800, 500, 1000)$ trovare i prezzi dei 3 farmaci.

7) Una ditta costruttrice di elettrodomestici produce 3 tipi di lavatrici. Il primo anno ha prodotto 100 unità di tipo S, 500 di tipo F e 50 di tipo D. Il secondo anno ha prodotto rispettivamente 20, 100 e 100 unità, mentre il terzo anno 0 unità di tipo S, 200 di tipo F e 300 di tipo D. Sapendo che i prezzi a cui sono vendute le lavatrici sono (20, 30, 40) e i costi unitari di produzione sono (5,7,10) determinare i profitti annui della ditta.
Supponiamo che i costi di produzione unitari aumentino il secondo anno rispettivamente di 1, 2 e 3 per ogni prodotto e il terzo anno di altre 2,3,3 unità monetarie, stabilire quale è la perdita di utile del secondo e del terzo anno se la ditta decide di non alzare i prezzi dei suoi prodotti.
Consideriamo poi il caso in cui i costi di produzione rimangano invariati per tutti e tre gli anni, ma che la ditta desideri aumentare i suoi profitti incrementando dello stesso importo x i prezzi di ogni singolo prodotto nel secondo anno e (ulteriormente) dello stesso importo y i prezzi per il terzo anno, in modo da ottenere nel secondo anno un profitto pari ad una volta e mezzo quello del primo anno e nel terzo anno un profitto doppio di quello avuto nel primo anno. Determinare x e y.

Domande teoriche

1) Definizione di spazio vettoriale.
2) Definizione di prodotto scalare.
3) Operazione tra vettori.
4) Definizione di vettori linearmente dipendenti.
5) Condizione di ortogonalità tra vettori.
6) Sia V lo spazio generato dal vettore $(1, 2, -1)$. Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale in $\mathbb{R}^3$.
7) Dimostrare che in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ una retta non passante per l'origine non è un sottospazio vettoriale.
8) Proprietà del determinante di una matrice.
9) Definizione di rango di una matrice.
10) Enunciare il teorema di Rouchè Capelli.
11) Enunciare il teorema di Cramer.

1) Si considerino i vettori $\mathbf{v_1} = (-1, 2, t)$ e $\mathbf{v_2} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v_3} = (-2, 2, -1)$. Per quali valori di t i vettori sono *linearmente dipendenti* ?

1. per ogni valore di t reale escluso $t = 0$
2. per $t = 0$
3. per qualsiasi valore di t
4. nessuno dei precedenti.

2) Siano $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ vettori *linearmente indipendenti* e $\mathbf{v_3} = 3\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2}$. Si consideri lo spazio vettoriale V generato da $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$. Allora la dimensione di V è uguale a

1. 2
2. 3
3. 1
4. dipende dal numero di componenti di ciascun vettore.

3) I vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ sono tra loro linearmente indipendenti. Allora possiamo concludere che

1. Appartengono a uno spazio vettoriale di dimensione esattamente uguale a 3
2. Appartengono a uno spazio vettoriale di dimensione strettamente maggiore di 3
3. Appartengono a uno spazio vettoriale di dimensione almeno 3
4. Nessuno dei precedenti

4) Se la matrice A è tale che $A = A^T$, allora possiamo dire che

1. A è la matrice identica
2. A è simmetrica
3. A è la matrice nulla
4. Nessuno dei precedenti

5) L'operazione di somma tra matrici

1. è commutativa e distributiva
2. è commutativa e ma non distributiva
3. non è commutativa
4. Nessuno dei precedenti

6) L'operazione di prodotto tra matrici

1. è commutativa e distributiva
2. è commutativa e ma non distributiva
3. non è commutativa
4. Nessuno dei precedenti

7) Se la matrice B $(n \times n)$ è tale che per ogni A $(n \times n)$ vale che $AB = BA = A$, possiamo affermare che

1. la matrice A è simmetrica
2. la matrice B è la matrice identit
3. la matrice B è la trasposta di A
4. Nessuno delle precedenti

8) Sia $A\mathbf{x} = B$ un sistema di equazioni lineari n incognite, m equazioni, se la matrice A e la matrice $A|B$ hanno rango pari a k (con $k < min(n, m)$)

1. il sistema non ammette soluzioni
2. il sistema ammette una sola soluzione
3. il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni.
4. Nessuno delle precedenti

9) Sia $A\mathbf{x} = B$ un sistema di equazioni lineari n incognite, m equazioni, se la matrice A ha rango pari a k (con $k < min(n, m)$) e la matrice $A|B$ ha rango pari a $k + 1$ (con $k \leq min(n, m)$)

1. il sistema non ammette soluzioni
2. il sistema ammette una sola soluzione
3. il sistema ammette ∞^{n-k-1} soluzioni
4. Nessuno delle precedenti