MATEMATICA GENERALE - CLEM - lettere M-Z

Sessione Invernale, I Appello , 15/1/2015, A.A. 2014/2015, Compito 1

Cognome .... Nome .... Matricola ....

A. A. di immatricolazione: 2014/15 □ Sessione Straordinaria □

1) *(11 p.ti)* Studiare la funzione

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{x^2}$$

a] Dominio e segno:
Il dominio della funzione, poiche e^x e $\sqrt[3]{x^2}$ sono definite ovunque ($\sqrt[3]{x^2}$ é definita ove é definita x^2, cioé tutto l'asse reale) , é l'intera retta reale. La funzione e^x é sempre positiva mentre $\sqrt[3]{x^2}$ é sempre non negativa, dunque il loro prodotto é non negativo $x \in \mathbb{R}$.

b] Limiti e asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \cdot \infty$$

l'ultimo limite é una forma indeterminata; lo riscrivo al modo seguente (con la sostituzione $y = -x$):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{y^2}}{e^y} = 0$$

poiché l'esponenziale (con base > 1) é un infinito di ordine superiore rispetto alle potenze positive della x a $+\infty$ (oppure si puó applicate il teorema dell'Hospital). Dunque $y = 0$ é asintoto orizzontale a $-\infty$, dove ovviamente non ci sono asintoti obliqui. Dobbiamo considerare eventuali asintoti obliqui a $+\infty$ quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

che diverge per i motivi sopra citati, dunque non ci sono asintoti obliqui a $+\infty$. Nessun asintoto verticale.
c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari):
Calcolo la derivata prima:

$$f'(x) = e^x \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} e^x = e^x \left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) = e^x \left(\frac{x + \frac{2}{3}}{\sqrt[3]{x}} \right)$$

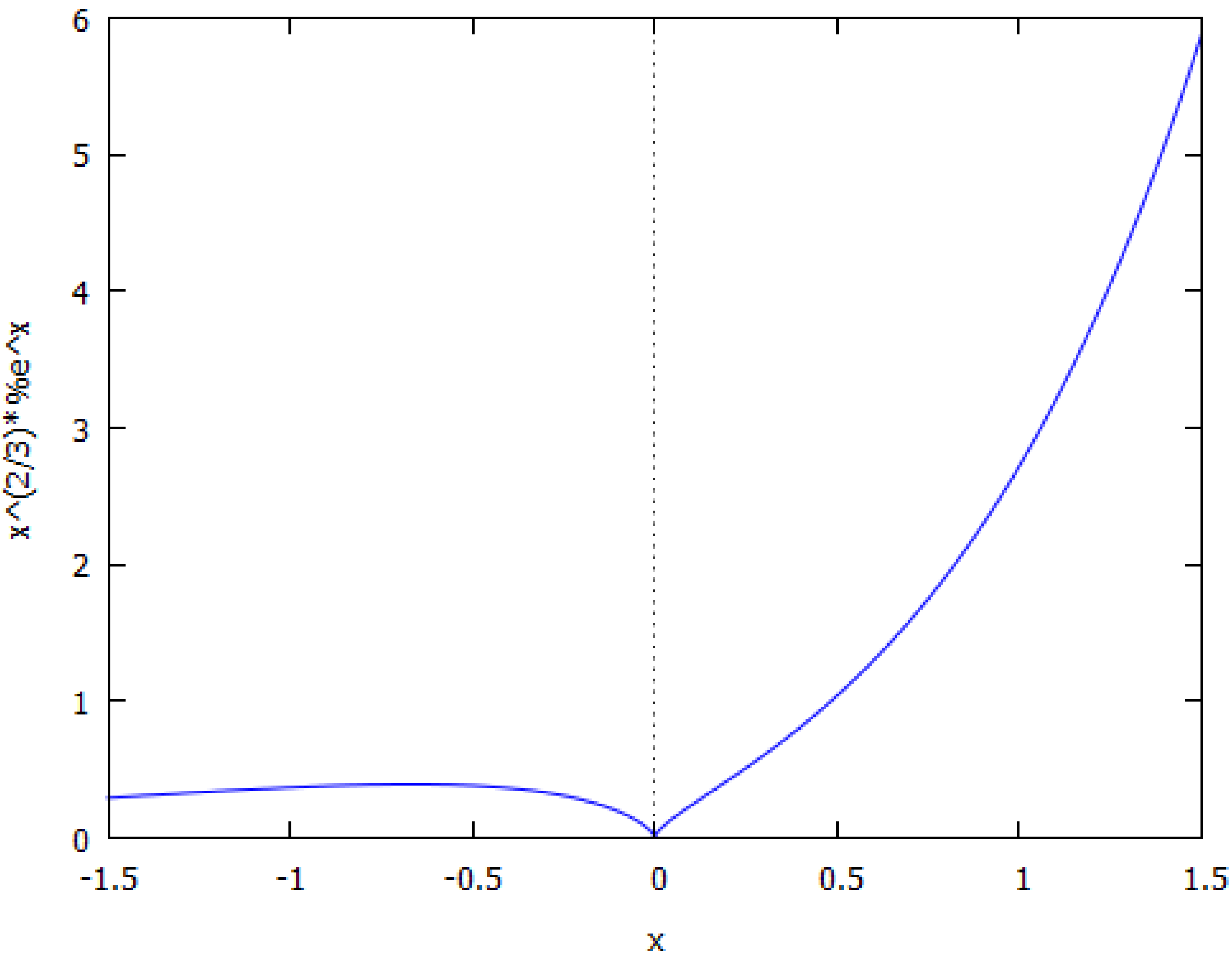
La $f(x)$ non é derivabile in $x = 0$ e presenta un punto stazionario in $x = -\frac{2}{3}$ (poiché e^x non si annulla mai).
d] Studio massimi e minimi:
poiché e^x é sempre positivo, e poiché $\sqrt[3]{x} > 0 \iff x > 0$ e $x + \frac{2}{3} > 0 \iff x > -\frac{2}{3}$ ne segue che la f é crescente nell'intervallo $(-\infty, -\frac{2}{3})$ e nell'intervallo $(0, +\infty)$ mentre decresce nell'intervallo $(-\frac{2}{3}, 0)$. Dunque $x = -\frac{2}{3}$ é un punto di massimo relativo non assoluto (poiché la funzione altrove diverge positivamente), mentre $x = 0$ é un punto di minimo relativo ed assoluto (essendo la funzione sempre non negativa). I valori minimo e massimo assunti sono rispettivamente $f(0) = 0$ e

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

e] Convessitá e flessi:

poiché $f'(x) = e^x \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} e^x$ allora $f''(x) = e^x \left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} \right) = e^x \left(\frac{x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}}{x^{\frac{4}{3}}} \right)$. Dunque f presenta punti di flesso in $x = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$, essendo convessa in $(-\infty, -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3})$ ed in $(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty)$, concava in $(-\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$ ed in $(0, -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3})$.

e] Grafico



2) *(5 p.ti)* Calcolare l'area della superficie delimitata dal grafico di $x\sqrt{x-1}$, dalle rette di equazione $x = 1$, $x = 5$ e l'asse delle ascisse:
Ad esempio integriamo per parti:

$$\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}x\,(x-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 - \frac{2}{3}\int_1^5 (x-1)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} 5 \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}} \right) \Bigg|_1^5 = \frac{2}{3} 5 \cdot 8 - \frac{4}{15} \left(4^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{272}{15}.$$

3) *(7 p.ti)* Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x+2y & = & 1 \\ 2x+4y & = & k \\ kx+12y & = & 1 \end{cases}$$

Soluzione:
Le matrici incompleta e completa del sistema sono rispettivamente:

$$M_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ k & 12 \end{pmatrix} \qquad M_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & k \\ k & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

La condizione necessaria di compatibilitá é $\det(M_C) = 0$; dunque:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & k \\ k & 12 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2k^2 + 24 - (4k + 12k + 4) = 2(k-2)(k-6) = 0.$$

Per $k \in \mathbb{R} \setminus \{2, 6\}$ non ci sono soluzioni (per il teorema di Rouché - Capelli). Esaminiamo i casi restanti singolarmente.
$k = 2$
Le matrici incompleta e completa divengono:

$$M_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ (2) & 4 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \qquad M_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Orlando il minore di ordine 1 della matrice incompleta otteniamo i due minori:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

dunque il rango della matrice incompleta in questo caso é 2 (essendovi un minore di ordine 2 non nullo ed essendo 2 il rango massimo possibile per quel tipo di matrice). Poiche poi $Rg(M_I) \leq Rg(M_C)$ e $\det(M_C) = 0$ anche la matrice completa ha rango 2. Dunque per il suddetto teorema il sistema é compatibile ed ammette una soluzione (rango = numero delle incognite). La soluzione é

$$\begin{cases} x & = & \frac{5}{4} \\ y & = & -\frac{1}{8} \end{cases} .$$

$k = 6$
Le matrici incompleta e completa divengono:

$$M_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \qquad M_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché tutte le righe/colonne della M_I sono proporzionali e la matrice é non nulla, $Rg(M_I) = 1$. Passando alla matrice completa, poiché $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ si ha $Rg(M_C) = 2$ (ricordiamo che $\det(M_C) = 0$). Poiché i ranghi delle due matrici non coincidono, il sistema, per $k = 6$, non ammette soluzione.

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti. L'ultima domanda vale 2 punti

4) La funzione $e^{-\frac{1}{x}}$

1. Ha asintoto orizzontale $y = 1$ a $+\infty$ $\surd$
2. Ha asintoto verticale $x = -1$
3. Ha asintoto obliquo $y = x$ a $\pm\infty$

5) *(2 p.ti)* il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \cos(x)}{x + \sin(x)}$$

Vale:

1. 1 $\surd$;
2. -1;
3. Non esiste.

6) *(2 p.ti)* La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \forall x \geq 0 \\ \\ -x^2 & \forall x < 0 \end{cases}$$

é derivabile in 0. $\boxed{\text{x}}$ Vero ☐ Falso

7) *(2 p.ti)* Data la funzione

$$F(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$$

$F'(1)$ é pari a

1. $-e^{-1}$ $\surd$;
2. e;
3. 1.

8) *(2 p.ti)* Dimostrare che se una funzione reale $f(x)$ derivabile é crescente in un intervallo I, allora f' é non negativa in I.

Sia x interno ad I fissato arbitrariamente. Allora, essendo f crescente in I ed $y \in I$, $\forall y < x \Rightarrow f(x) - f(y) > 0$ e $\forall y > x \Rightarrow f(x) - f(y) < 0$, dunque, in ogni caso, $\forall y \neq x$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0 \Rightarrow \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) \geq 0$$