MATEMATICA GENERALE - CLEM - lettere M-Z - SIMULAZIONE

Sessione Invernale, Simulazione, 15/12/2015, A.A. 2015/2016, Compito a

Cognome .... Nome .... Matricola ....

A. A. di immatricolazione: 2014/15 ☐ Anni precedenti ☐

1) *(10 p.ti)* Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x}}$$

a] Dominio e segno

dominio : $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$

segno : $f(x) \geq 0 \ \forall x \in$ dom.

b] Limiti ed asintoti

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = 0$

$x = 0$ as. v. $y = x$ as. a $+\infty$ $y = -x$ as. a $-\infty$

c] Determinazione punti critici (ovvero stazionari)

$$f'(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}}}$$

$x = -\sqrt[3]{4}$ pto stazionario

crescente in $(-\sqrt[3]{4}, 0)$ e in $[2, +\infty)$

decrescente in $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$.

d] Studio massimi e minimi

$x = -\sqrt[3]{4}$ pto di min. relativo e minimo:

$f(-\sqrt[3]{4}) = \sqrt{\frac{12}{\sqrt[3]{4}}}$

$x = 2$ pto di minimo assoluto e minimo:

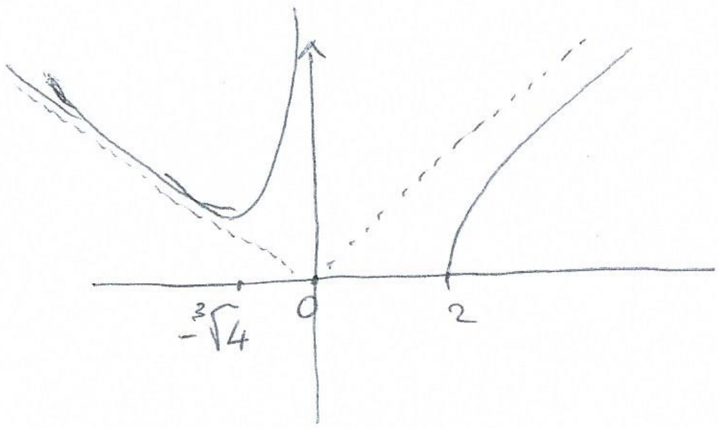
$f(2) = 0$ (pto di non derivabilità)

e] Convessitá e flessi

$$f''(x) = -24 \frac{x^3 - 2}{x^4 \left(x^2 - \frac{8}{x}\right)^{3/2}} \qquad x = \sqrt[3]{2} \text{ non accett.}$$

$$f'' < 0 \text{ in } (2, +\infty) \qquad f'' > 0 \text{ in } (-\infty, 0)$$

e] Grafico



2) *(5 p.ti)* Per quali valori di h e k la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 4 \arctan x & x < 1 \\ 2hx + k & x \geq 1 \end{cases}$$

é continua e derivabile?

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{1+x^2} & x < 1 \\ 2h & x > 1 \end{cases}$$

continuità: $\lim_{x \to 1^+} 2hx + k = 2h + k = \lim_{x \to 1^-} \text{arcotan}(x) = \pi$

derivabilità: $\lim_{x \to 1^+} 2h = 2h = \lim_{x \to 1^-} \frac{4}{1+x^2} = 2$

$$\begin{cases} 2h + k = \pi \\ 2h = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = \pi - 2 \\ h = 1 \end{cases}$$

3) *(7 p.ti)* Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema e trovarle:

$$\begin{cases} x + y + kz &= 2 \\ x + y + 3z &= 2 \\ 2x + ky - z &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix} = (k-2)(k-3)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix}}{(k-2)(k-3)} = \dfrac{2k-1}{k-2} \quad \ldots\ldots \\[2ex] y = \dfrac{-3}{k-2} \\[2ex] z = 0 \end{cases}$$

$k = 2$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

sistema non compatibile

$k = 3$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

∞^1 soluzioni

$$\begin{cases} x = 5 - 10z \\ y = -3 + 7z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Individuare la risposta corretta nelle seguenti domande a risposta multipla. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata -1 punto, risposta non data 0 punti.

4)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_1^x \left(t+\frac{1}{t}\right)dt =$$

1. 2

2. $+\infty$

3. $\frac{1}{2}$

5) La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\beta^2 + 4\beta + 4)^n$$

converge per

1. $2 < \beta < 4$;

2. $1 < \beta < 3$;

3. $-3 < \beta < -1$

6) *(2 p.ti)* Siano A e B matrici quadrate di ordine n. Se $AB \neq BA$ allora $det(AB) \neq det(BA)$.
□ Vero ☒ Falso

7) *(2 p.ti)* Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$. Allora

$$\int_0^1 (1-x)f(2x)dx =$$

1. $\int_0^1 (1-x)^2 f'(2x)dx$; è uguale al 3

2. $-\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 f'(2x)dx$;

3. $\int_0^1 (1-x)^2 f'(2x)dx$.

8) *(2 p.ti)* Il polinomio di Taylor di ordina 2 centrato nel punto $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = \log(1+2x^2)$ é: é

1. $\log 3 + \frac{3}{4}(x-1)$;

2. $\log 3 + \frac{4}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2$;

3. $\log 3 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}x^2$;