Programma particolareggiato delle lezioni svolte nel corso CLEM di Matematica Generale, II canale, nell'anno accademico 2016/2017 dal Prof. F. Manzini.

Il Programma presentato é quello da 12 crediti. Gli studenti che debbono superare quello da 9 crediti possono evitare gli argomenti scritti in grassetto.

Parte A

19-9 - Lez. 1 - Generalità sul corso e sulle modalità di esame. Insiemi ed elementi, sottoinsiemi, unione ed intersezione , insieme differenza, complementare, insieme delle parti, partizione di un insieme, prodotto cartesiano (cap 1 par 5.1,5.2,5.3).

20-9 - Lez. - 2 - Applicazioni fra insiemi, dominio e codominio, immagini e controimmagini (cap 2 par 1), iniettivitá e suriettivitá. Funzioni composte e funzione inversa (cap 2 par 5.1,5.2). Insiemi numerici : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ con rispettive proprietá algebriche, rappresentazione su una retta orientata, ordinamento lineare $<$ e proprietá, relazioni tra le operazioni e l'ordinamento, rappresenzazione decimale.

21-9 - Lez. 3 - Insieme $\mathbb{R}$, relazione d'ordine $\leq$, proprietá algebriche e geometriche, (cap 1 par 1,2,3) assioma di Dedekind, irrazionalitá di $\sqrt{2}$,insiemi finiti ed insiemi numerabili, numerabilitá di $\mathbb{Z}$ (cap 1 par 8,8.2). Cenni alla non numerabilitá di (0,1). Sistema di ascisse su una retta e topologia di $\mathbb{R}$: intervalli propri ed impropri (cap 1 par 6,6.1), intorno di un punto, intorno destro e sinistro di un punto, punti interni ed esterni di un insieme, insiemi aperti e chiusi. (cap 10 par 2).

26-9 - Lez. 4 - Punti di frontiera (cap 10 par 2), punti isolati, punti di accumulazione, massimo, minimo (cap 1 par 6,6.1), maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore di un insieme. Esempi svolti in aula.

$\square$

Parte B

27-9 - Lez. 5 - Funzioni reali di variabile reale, iniettive, suriettive, biiettive; funzione inversa. Funzioni lineari affini $f(x) = ax + b$ (con $a \neq 0$): iniettivitá e suriettivitá; calcolo esplicito della inversa. Funzione $f(x) = x^2$, funzione $f(x) = \sqrt{x}$, funzione $f(x) = |x|$; alcune trasformazioni geometriche delle funzioni. Funzioni monotone (cap 2 par 6.2), pari e dispari (cap 2 par 7)

28-9 - Lez. 6 - Rette nel piano cartesiano, equazione in forma implicita ed esplicita; Interpretazione geometrica del coefficiente angolare ed intercetta; (cap 2 par 3), retta per un punto e per due punti . Parallelismo, incidenza e perpendicolaritá. Equazione segmentaria della retta, distanza tra retta e punto, condizione di allineamento di tre punti.

3-10 - Lez. 7 - Definizione di polinomio, radice di un polinomio; polinomi reali di primo e secondo grado e rispettive radici. Caso trinomio reale di secondo grado con $\Delta < 0$: numeri complessi; proprietá algebriche dei numeri complessi. Norma e modulo di un numero complesso. Piano di Argand-Gauss e cenni alla rappresentazione trigonometrica di un numero complesso. Esempi svolti in aula.
Teorema fondamentale dell'algebra, teorema di Ruffini, fattorizzazione dei polinomi in $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ ed in $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$. Soluzioni delle disequazioni di primo e secondo grado. Esempi svolti in aula.

4-10 - Lez. 8 - Funzione radice cubica. Disequazioni fratte ed irrazionali. Soluzione in aula di

$$\sqrt{2x-1} - x \geq 0, \quad -\sqrt{4x-3} + x \geq 0, \quad \sqrt[3]{x^3+x-1} \geq x$$

Regola di Ruffini; inizio dello studio di funzione: dominio, segno e intersezione con gli assi di:

$$\frac{3x-1}{1-x}, \quad \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x-2}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}, \quad \sqrt{\frac{x-3}{x^2-3x+2}},$$
$$\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-3x+2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}-x}, \quad \frac{x+2|x|}{x-1}$$

Funzioni esponenziali e logaritmiche (cap 2 par 8.1, 8.2)

5-10 - Lez. 9 - Svolte in aula (dominio, segno, intersezione con assi):

$$\log\left(x^2-3x+2\right), \quad \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right), \quad \frac{\log(x)}{\log(x)-1}, \quad \frac{1}{\log(x)+1},$$
$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x)-1}$$

Funzioni assegnate:

$$e^x - e^{\frac{1}{x}}, \quad e^{\sqrt{x^2-x}} - e^{\sqrt{x}}$$

Funzioni trigonometriche: $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ e loro inverse.(cap 2 par 8.3).

10-10 - Lez. 10 - Dominio e segno di :

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}, \quad \sin(\log(x))$$

Generalitá sulle successioni (cap 3 par 1.1), monotonia (cap 2 def 6.2), convergenza e divergenza (cap 3 par 1.1-1.3). Esempi svolti in aula.

11-10 - Lez. 11 - Successioni indeterminate (cap 3 def 1.4); successioni limitate, comportamento asintotico delle geometriche (cap 3 teor 3.1,par 3.2). Esempi vari, tra i quali dimostrare che :

$$\lim_n n^2 = +\infty$$
$$\lim_n x^n = +\infty \quad \text{per} \quad x > 1$$
$$\lim_n x^n = 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 1$$
$$\lim_n \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

Comportamento asintotico delle successioni monotone; teoremi sulle successioni: unicitá del limite (cap 3 par 1.5), confronto (cap 3 teor 5.1), due carabinieri (cap 3 teor 5.2), permanenza del segno.
Limiti di somme, prodotti, quozienti di successioni (cap 3 par 5.2). Esempi vari.

12-10 - Lez. 12 - Limite di $a_n^{b_n}$. Tutte le 7 forme indeterminate; successioni infinitesime ed infinite (cap 3 par 6.1,6.2); confronto tra le successioni infinite seguenti :(cap 3 par 6.1)

$$log^{\alpha}(n), \quad n^{\beta}, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n \quad \forall \quad \alpha > 0, \beta > 0, a > 1;$$

limiti notevoli:

$$\lim_n n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{h}} = e^{\frac{k}{h}}, \quad \lim_n n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

Confronto tra successioni infinitesime ed infinite. Esempi vari.

17-10 - Lez. 13 - Successioni asintotiche; **criterio del rapporto per successioni** e discussione di alcuni limiti notevoli (cap 3 par 6.1). Serie numeriche : convergenza, divergenza, indeterminazione (cap 6 def 1.1,1.2); esempi:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)}, \quad \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad \sum_k k, \quad \sum_k (-1)^k$$

Cenni al principio di induzione. Serie geometriche e loro comportamento asintotico (cap 6 par 2); esempi vari.

18-10 - Lez. 14 - Serie a termini di segno costante (cap 6 teor 4.1), condizione necessaria di convergenza (cap 6 teor 3.1), **criterio del rapporto** (cap 6 teor 4.4) criterio del confronto (cap 6 teor 4.2), serie armonica, **divergenza della seria armonica**, serie armonica generalizzata (cap 6 esem 4.1).
Funzioni reali di variabile reale : limiti all'infinito, finiti o no. Esempi vari.

19-10 - Lez. 15 - Limiti al finito, finiti o no;(cap 3 par 2), esempi di funzione che non ammettono limite.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{in} \quad x_0 = 0; \quad g(x) = \sin(x) \quad \text{a} \quad \pm\infty.$$

Teoremi sulle operazioni tra limiti (cap 3 par 5.2); del confronto (cap 3 teor 5.1), dei carabinieri (cap 3 teor 5.2), della permanenza del segno(cap 3 pag.86).
Calcolo dei limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

Limiti destro e sinistro di una funzione (in un punto) finito o no (cap 3 par 2.1,2.2), esempi vari; calcolo di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$$

24-10 - Lez. 16 - Relazione fra limiti, limiti destri e sinistri di una funzione in un punto.
Calcolo dei limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

con argomentazioni geometriche (cap 3 es 5.11).
Funzioni infinitesime ed infinite al finito ed all'infinito; confronti fra funzioni infinitesime/infinite (cap 3 par 6). Funzioni asintotiche. Esempio di infinitesimi non confrontabili:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x \quad \text{in} \quad x_0 = 0.$$

Esempio di infiniti non confrontabili:

$$f(x) = 2x + x\sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = x \quad \text{per x} \to +\infty.$$

Infinitesimi ed infiniti campione al finito ed all'infinito. Ordine di infinitesimo o di infinito al finito e all'infinito. Esempi vari.

25-10 - Lez. 17 - Limiti notevoli con esempi, asintoti verticali e orizzontali e/o obliqui con esempi. Continuitá di una funzione, verifica che $f(x) = mx + q$ é continua, somma, prodotto, quoziente di funzioni continue, funzioni composte di funzioni continue, funzioni continue elementari.

26-10 - Lez. 18 - Teoremi sulle funzioni continue: della permanenza del segno, di Weierstrass (cap 4 teo 3.4), dei valori intermedi (cap 4 teo 3.2), degli zeri (cap 4 teo 3.1); esempi e controesempi vari. Calcolo di alcuni limiti mediante il metodo di **"sostituzione degli infinitesimi"** (trattato con le relative cautele).
Studio del dominio, segno, limiti e asintoti di:

$$f(x) = e^x - e^{\frac{1}{x^2}}$$

7-11 - Lez. 19 - Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica, equazione della retta tangente (cap 5 par 1) al grafico di una funzione in un punto . Derivate destre e sinistre di una funzione in un punto (cap 5, def 1.4), funzioni non derivabili (p.ti angolosi, p.ti di cuspide e p.ti a tangente verticale). Relazione tra continuitá e derivabilitá di una funzione in un punto (cap 5, par 1.1). Regole di derivazione (cap 5, par 3,4), tabella delle derivate elementari (cap 5, par 2) ed esempi vari; derivata di $f(x)^{g(x)}$. Punti di massimo e minimo locali (cap 2, def 6.7), teorema di Fermat sui punti stazionari (cap 5, teor 7.1)

8-11 - Lez. 20 - crescenza / decrescenza di una funzione e segno della derivata prima (cap 5, par 9). Massimi e minimi locali e globali di una funzione (cap 2, def 6.3). Esempi svolti in aula:

$$\frac{x|x| + 2x + 1}{|x|}, \quad \frac{\log(x)}{x}, \quad xe^{\frac{1}{x}}, \quad \left(x^2 - 8\right)e^x$$

9-11 - Lez. 21 - Convessitá e concavitá di una funzione e interpretazione geometrica; punti di flesso, interpretazione geometrica e caratterizzazione analitica (cap 5, par 12). Esempi (gli stessi della lez. 20).

14-11 - Lez. 22 - Differenziale, polinomio e formula di Taylor; valutazione dell' infinitesimalitá del resto. Cenni allo sviluppo in serie di Taylor di una funzione (cap 7, par 7.2 def 7.1 e parte del teor 7.5). Polinomi di Taylor delle funzioni:

$$\sqrt{x}, \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad e^x, \quad \log(x+1)$$

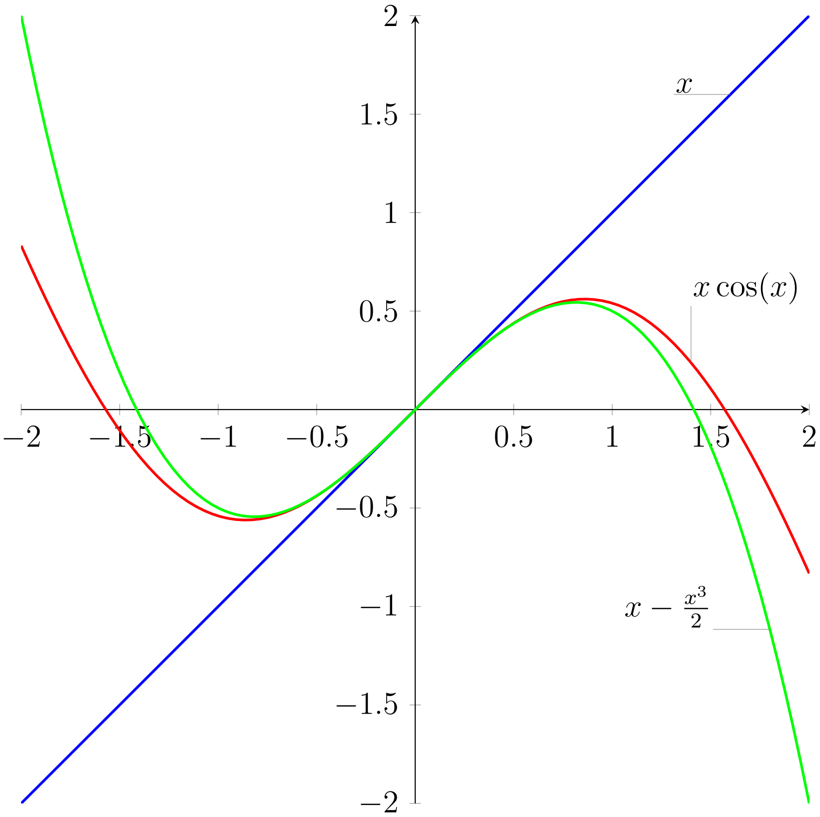

Figura 1: Confronto tra la funzione e le approssimazioni dei polinomi di Taylor.

Calcolo di alcuni limiti con l'utilizzo della formula di Taylor. Cenni al confronto (figura 1) tra il grafico della funzione $x\cos(x)$ ed i polinomi di Taylor di ordine 1 e 3 di essa centrati nel punto $x_0 = 0$.

Caratterizzazione dei punti stazionari di una funzione mediante il valore delle derivate "successive" calcolate in essi (cap 7, par 7.3 teor 7.6-7.7). Teoremi di Rolle, Lagrange, (cap 5, par 8)

15-11 - Lez. 23 - Teor. di de l'Hôpital (cap 5, par 10). Calcolo di alcuni limiti. Calcolo dell'ordine di infinito/infinitesimo di una funzione. Studio completo delle funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \geq 0 \\ x^2 + 2x & \forall x < 0 \end{cases}$$
$$f(x) = x^4(x-1)^3$$

$\square$

Parte C

16-11 - Lez. 24 - Definizione di primitiva (cap 7, def 4.1), integrale indefinito (cap 7, par 5), tabella degli integrali indefiniti delle funzioni elementari, regola di sostituzione immediata (cap 7, par 5.4). Calcolo di alcuni integrali indefiniti.

21-11 - Lez. 25 - Integrale definito e funzioni integrabili (secondo Riemann) (cap 7, par 1,2), Teorema della media integrale per funzioni limitate ed integrabili, Teorema della media integrale per funzioni continue (cap 7, par 3.2); esempio di funzione non integrabile (secondo Riemann) nell'intervallo $[0,1]$: la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Proprietá dell'integrale definito (cap 7, par 3.1). Teorema di Torricelli - Barrow e calcolo dell'integrale definito (cap 7, par 4).

22-11 - Lez. 26 - Metodi di integrazione per parti e per sostituzione (cap 7, par 5.3,5.4). Esempi svolti in aula. Integrazione di alcune funzioni razionali:

$$\int \frac{cx+d}{(x-x_0)(x-x_1)}dx \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{(x-x_0)^2}$$

Cenni all'integrale generalizzato.

12-12 - Lez. 34 - Cenni alla topologia standard di $\mathbb{R}^2$: intorni di un punto, insiemi aperti, chiusi, limitati, punti interni e frontiera di un insieme.
Funzioni reali di due variabili reali: dominio (esempi svolti in aula), continuitá (cap 10, pag 292); definizione di massimo e minimo relativo ed assoluto (cap 10, pag 287)(vedi figura 2 e 3 rispettivamente); teorema di Weierstrass (cap 10, teor 5.1),derivate parziali (esempi svolti in aula)(cap 10, par 6), differenziabilitá (cap 10, par. 7), equazione del piano tangente (esempi svolti in aula)(cap 10, pag 296),curve di livello (cap 10, par. 1.2) (vedi figura 5), relazione tra curve di livello di una funzione e il vettore gradiente (cap 10, pag 297 microt. 7.1).

13-12 - Lez. 35 - Formula di Taylor arrestata al differenziale di secondo ordine (cap 10, par 9,9.1,9.2) per funzioni di **n** variabili (2 variabili per il corso da 9 crediti). Condizioni del primo ordine per i punti di estremo locale interni(cap 10, par 11, teor 11.1), condizioni del secondo ordine (cap 10, par 11.2, teor 11.2). Punti di sella: vedi figura 4. Esempi svolti in aula:

Determinare massimi e minimi locali/assoluti delle funzioni $f(x,y)$ negli insiemi specificati

$$f(x,y) = xe^x + y^2 \quad in \quad \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = 2x^2y - xy^2 + 2xy - y^2 \quad in \quad \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + y^2 + xz + z^2 - xy^2 \quad in \quad \mathbb{R}^3$$

14-12 - Lez. 36 - Determinazione dei punti di massimo e minimo vincolati ,locali ed assoluti, tramite l'utilizzo della Lagrangiana (cap 10, pag 317) e dell' Hessiana della Lagrangiana (cap 10, teor 12.2). Esempi svolti in aula:

Determinare massimi e minimi locali/assoluti delle funzioni $f(x,y)$ negli insiemi specificati

$$f(x,y) = xy \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 4y = 16\}$$
$$f(x,y) = x^2y + xy^3 \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$
$$f(x,y) = xy \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

□

Parte C

23-11 - Lez. 27 - Spazi vettoriali e loro proprietá. $\mathbb{R}^n$, spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) (cap 8, par 1,2) e sue proprietá : somma e prodotto per uno scalare, ordinamento (parziale). Vettori riga e colonna, combinazioni lineari tra vettori (cap 3, par 2.1), prodotto scalare tra vettori, vettori ortogonali, norma e distanza tra 2 punti (cap 8, par 3).

28-11 - Lez. 28 - Sottospazi vettoriali, sottospazio generato da un insieme di vettori (cap 3, microt 4.1), insieme di generatori per una spazio vettoriale, dipendenza ed indipendenza lineare di vettori e loro proprietá (cap 3, par 5), base di uno spazio vettoriale, ortogonalitá ed indipendenza lineare, rango di un insieme di vettori, proprietá del rango. Base canonica di $\mathbb{R}^n$ (cap 8, esem 4.1), coordinate di un vettore. Esempi vari.

29-11 - Lez. 29 - Dimensione di uno spazio vettoriale (cap 8, par 6). Definizione di sistema lineare (cap 9, par 1). Matrici; operazioni tra matrici: somma , prodotto per uno scalare, prodotto righe per colonne; matrici trasposte e simmetriche, matrici diagonali, triangolari superiori ed inferiori, matrice nulla e matrice unitaria (cap 8, par 7,8,8.2). Determinante di una matrice quadrata secondo lo sviluppo di Laplace. Regola di Sarrus.

30-11 - Lez. 30 - Proprietá dei determinanti (cap 8, par 9,9.1). Definizione e calcolo matrice inversa (cap 8, par 8.3,10). Scrittura di un sistema lineare nella forma:

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

(cap 9, par 1,1.2) Rango di una matrice (cap 8, par 11), rango per righe e per colonne di una matrice (cap 8, teor. 11.2), teorema di Kronecker (cap 8, teor. 11.1). **Dimensione degli spazi vettoriali generati da un insieme finito di vettori**;

5-12 - Lez. 31 - Relazioni fra rango di una matrice quadrata, rango dei vettori riga/colonna, determinante della stessa.
Teorema di Cramer (cap 9, par 2) ed espressione della soluzione nella forma

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$

.
Teorema di Rouché - Capelli (cap 9, par 3,3.1).

6-12 - Lez. 32 -

Studiare , al variare di $t \in \mathbb{R}$, le soluzioni dei sistemi lineari seguenti:

$$\begin{cases} x + tz = 1 \\ -tx + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + tz = 1 \\ 2x + ty + 4z = 5 \end{cases}$$

Sistemi lineari omogenei e loro soluzioni (cap 9, par 4.1), determinazione dello spazio vettoriale di suddette soluzioni, individuazione di una base e **della dimensione di tali spazi**. Esercizi svolti in aula:

Studiare lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo seguente, individuandone una base e calcolandone la dimensione, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ tx + y = 0 \\ x + ty + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ tx + y = 0 \\ x + ty = 0 \end{cases}$$

Definizione di autovalore di una matrice reale. Polinomio caratteristico, autospazio associato ad un autovalore. Autovalori di matrici simmetriche, proprietá degli autovettori associati ad autovalori distinti (e reali); esempi svolti in aula.

7-12 - Lez. 33 - **Molteplicitá algebrica e geometrica di un autovalore. Cenni riguardo a matrici simili, diagonalizzabili e alla caratterizzazione delle matrici diagonalizzabili in relazione alle molteplicitá algebriche e geometriche dei loro autovalori.**

Date le seguenti matrici, calcolarne gli autovalori e le rispettive molteplicitá algebriche e geometriche; determinare inoltre l'autospazio associato ad ogni autovalore ed una base per esso (dire inoltre se la matrice é diagonalizzabile).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici definite, semidefinite, indefinite; **caratterizzazione di esse tramite gli autovalori e** tramite i minori principali.

Gli argomenti sottolineati sono comprensivi di dimostrazione.
Testi di riferimento:

1. Matematica per l'economia e l'azienda. L.Peccati, S.Salsa, A.Squellati - Egea - III ed. (riferimenti in blu)
2. Matematica Generale. Simon, Blume - Egea 2007 (riferimenti in verde).
3. Esercizi di Matematica Generale, A.Bersani, F.Manzini, L. Mastroeni, Esculapio Ed.

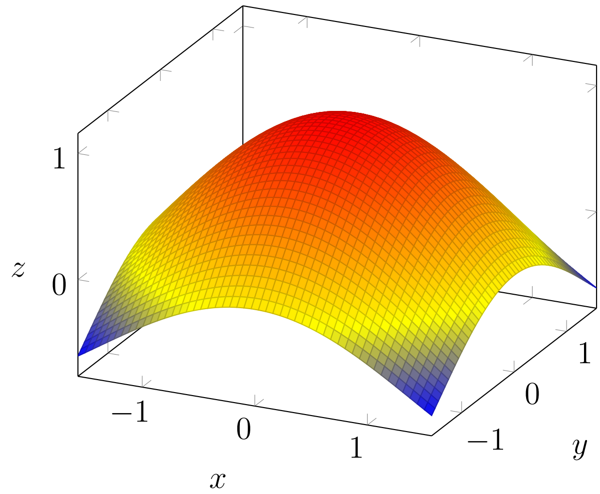

Figura 2: $z = \cos(x^2 + y^2)$ in un intorno dell'origine

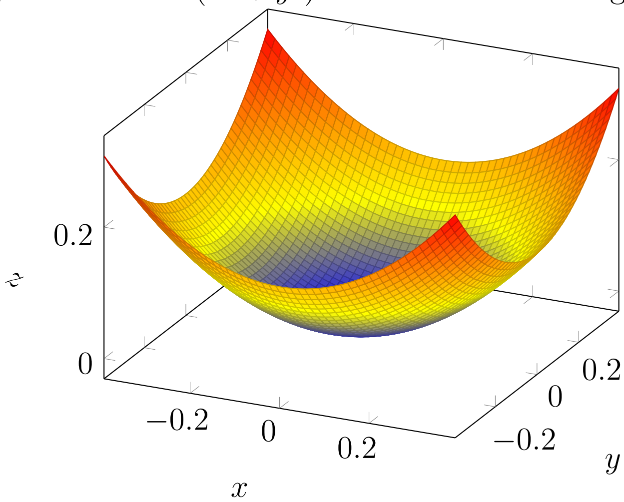

Figura 3: $z = x^2 + y^2$ in un intorno dell'origine

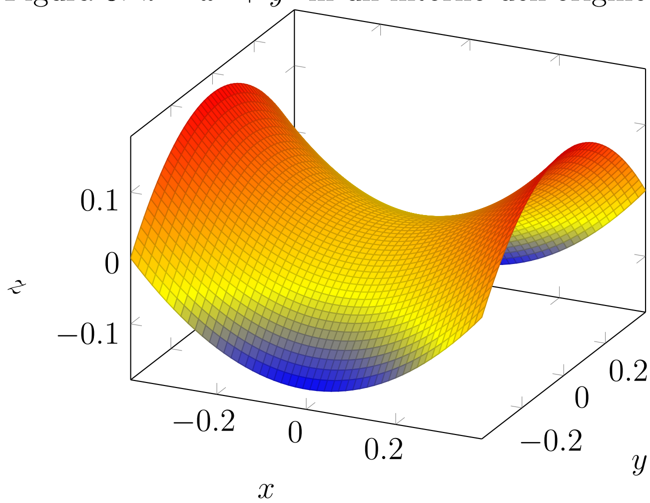

Figura 4: $z = x^2 - y^2$ in un intorno dell'origine

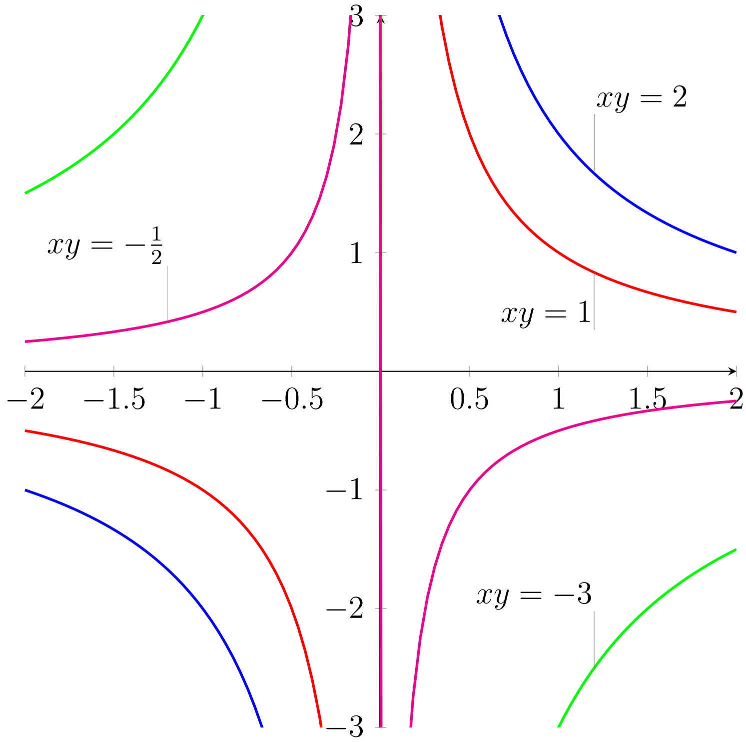

Figura 5: Curve di livello della funzione $f(x, y) = xy$