Irrazionalità di una radice quadrata

Federico Flore

21 settembre 2017

Definizione 1.
Un numero naturale m è pari (rispettivamente dispari) se e solo se esiste un numero naturale r tale che $m = 2r$ (rispettivamente $m = 2r + 1$).

Infatti dire che un numero naturale m è pari significa dire che è il "doppio" di un altro numero naturale o, in modo equivalente, che è divisibile per 2. In simboli: $m = 2r$ per un certo numero naturale r. Ad esempio $m = 6$ è pari ed in tal caso r vale 3, perchè $6 = 2 \cdot 3$. Notiamo che con la formula $m = 2r$ si ottengono tutti i numeri pari facendo variare di r fra tutti i numeri naturali: se si pone $r = 0, 1, 2. \ldots$, si ricavano i valori $m = 0, 2, 4, \ldots$

I numeri dispari sono i numeri che, divisi per 2, danno come resto 1, equivalentemente sono i successivi dei numeri pari. Entrambe queste informazioni sono racchiuse nella formula $m = 2r + 1$, che in particolare indica che il numero m è il successivo del numero pari $2r$. Ad esempio per $m = 7$ si ha $r = 3$ e $7 = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1$ è il successivo del numero pari $2 \cdot 3 = 6$. Come nel caso dei numeri pari, al variare di r fra tutti i numeri naturali, con la formula $m = 2r + 1$ si ottengono tutti i numeri dispari: infatti per $r = 0, 1, 2, \ldots$ si ricavano i valori $m = 1, 3, 5, \ldots$

Richiamiamo il modo attraverso cui l'addizione e la moltiplicazione operano sulla "parità" dei numeri, ossia sul loro essere pari o dispari:

Lemma 2.

1. *La somma di due numeri naturali pari e la somma di due numeri naturali dispari sono entrambe pari. La somma di un numero naturale pari e di uno dispari è dispari.*

2. *Il prodotto di due numeri naturali pari e di un numero naturale pari per uno dispari sono entrambi pari. Il prodotto di due numeri naturali dispari è un numero dispari.*

Dimostrazione.
Prendiamo due numeri naturali m, n. Supponiamo dapprima che siano entrambi pari, allora possiamo scrivere: $m = 2r$ e $n = 2s$ dove r, s sono due numeri naturali. Sommando, ricaviamo $m+n = 2r+2s = 2(r+s)$. Abbiamo così scritto la somma $m+n$ come il doppio del numero $r+s$, quindi $m + n$ è pari. Invece, moltiplicando, si ha $mn = 2r \cdot 2s = 2(2rs)$, che è pari, perché è il doppio di $2rs$.
Supponiamo ora che entrambi i numeri siano dispari. Questa volta scriviamo $m = 2r + 1$

e $n = 2s+1$ con r, s numeri naturali e si ottiene $m+n = 2r+1+2s+1 = 2(r+s+1)$, che è pari in quanto doppio di $(r+s+1)$, mentre $mn = (2r+1)(2s+1) = 4rs+2r+2s+1 = 2(2rs+r+s)+1$, che è dispari (è il successivo del numero pari $2(2rs + r + s)$).
Terminiamo con $m = 2r$ pari e $n = 2s+1$ dispari: in tal caso $m+n = 2r+2s+1 = 2(r+s)+1$ è dispari, mentre $mn = 2r(2s + 1)$ è pari. □

Dal risultato precedente si ricava come caso particolare, che il quadrato di un numero pari è anch'esso sempre pari, mentre il quadrato di un numero dispari è sempre dispari; quindi possiamo affermare che:

Proposizione 3.
Se m^2 è un multiplo di 2 allora m è multiplo di 2.

Dimostrazione.
Utilizzando la regola logica la quale afferma che $p \Rightarrow q$ equivale a $\neg q \Rightarrow \neg p$ si può dimostrare che se m non è un multiplo di 2 allora m^2 non sarà un multiplo di 2. Se un numero non è un multiplo di 2 allora

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \, : \, m = 2k + 1.$$

Per trovare m^2 bisogna elevare $2k + 1$ alla seconda:

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

I termini $4k^2$ e $4k$ sono sicuramente multipli di 2, perciò $4k^2 + 4k + 1$ non sarà un multiplo di 2 visto che è un multiplo di 2 sommato di 1. Perciò se m non è un multiplo di 2 allora m^2 non è un multiplo di 2 $\Longrightarrow$ se m^2 è un multiplo di 2 allora m sarà multiplo di 2. □

Teorema 4.
La radice quadrata di 2 non è un numero razionale.

Dimostrazione.
La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa; ossia, supponiamo che $\sqrt{2}$ è un numero razionale. Se $\sqrt{2}$ è razionale, allora possiamo scrivere che

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ irriducibili.}$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza precedente e otteniamo la nuova uguaglianza

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad m^2 = 2n^2.$$

Questa mostra che m^2 è un numero pari (è il doppio di un altro numero), ma allora, per quanto visto nel Lemma 2 anche m deve essere pari. Quindi possiamo scrivere $m = 2r$, che, sostituita nell'ultima uguaglianza, comporta $4r^2 = 2n^2$ e questa si semplifica in $n^2 = 2r^2$.
Ancora in modo del tutto analogo a prima otteniamo che anche n^2 e quindi anche n è un numero pari. Ma allora m ed n non sono irriducibili. Abbiamo così trovato una contraddizione fra due affermazioni. Tale contraddizione è sorta dall'aver supposto arbitrariamente che $\sqrt{2}$ fosse un numero razionale: dobbiamo quindi accettare la sua negazione,che è proprio la tesi del teorema. □

Vogliamo ora dimostrare che

$$\forall\, x \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}.$$

Per prima cosa, generalizziamo il Lemma 2.

Lemma 5.
Se m^2 è un multiplo di x e x non è un quadrato allora m è un multiplo di x.

Dimostrazione.
Come prima: ipotizziamo per assurdo che m non sia multiplo di x e che x non sia un quadrato. Un numero non multiplo di x è un multiplo di x sommato ad una certa quantità minore di x quindi

$$\exists\, k,\, i \in \mathbb{N} \,:\, i < x,\, m = xk + i.$$

Ovvero,

$$m = xk + 1 \quad \vee \quad m = xk + 1 \quad \vee \quad m = xk + 3 \quad \vee \quad \ldots \quad \vee \quad m = xk + (x-1).$$

In maniera del tutto analago al Lemma 2, eleviamo m al quadrato, quindi

$$m^2 = x^2k^2 + 2kxi + i^2.$$

Dimostriamo che m^2 non è un multiplo di x. Se lo fosse, dovrebbe risultare o che $i^2 = x$ oppure i^2 è un multiplo di x. La prima ipotesi è di rapida discussione: i^2 non sarà mai x perché non esiste in $\mathbb{N}$ nessun numero minore di x che elevato al quadrato sia x (x non quadrato perfetto). La seconda invece necessita una discussione più articolata: se i^2 fosse multiplo di x allora esisterebbe un $h \in \mathbb{N}$ tale che $i^2 = xh$. Questo è impossibile perché se esistesse un numero naturale h, necessariamente dovrebbe essere $h < x$ (se fosse $h = x$, risulterebbe $i^2 = x^2$, e quindi $i = x$, che è contro la assunzione che $i < x$) allora xh sarebbe un quadrato ma per supposizione iniziale x non è un quadrato; se lo fosse, dato che x non è un quadrato per ipotesi, il numero h deve essere fattorizzabile per x. Ma siccome $h < x$, questo è impossibile e di conseguenza xh non è un quadrato a meno che lo sia x.
Ricapitolando i^2 non è uguale a x ne multiplo di x e allora $m^2 = x^2k^2 + 2xki + i^2$ non è multiplo di x. □

Teorema 6.
Se x non è un quadrato di un numero naturale, allora la radice quadrata di x è irrazionale.

Dimostrazione.
La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa; ossia, supponiamo che $\sqrt{x}$ è un numero razionale. Se $\sqrt{x}$ è razionale, allora possiamo scrivere che

$$\sqrt{x} = \frac{m}{n}, \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ irriducibili.}$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza precedente e otteniamo la nuova uguaglianza

$$x = \frac{m^2}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad m^2 = xn^2.$$

Questa mostra che m^2 è un numero multiplo di x, ma allora, per quanto visto nel Lemma 5 anche m deve essere un multiplo di x. Quindi possiamo scrivere $m = xr$, che, sostituita nell'ultima uguaglianza, comporta $x^2r^2 = xn^2$ e questa si semplifica in $n^2 = xr^2$.
Ancora in modo del tutto analogo a prima otteniamo che anche n^2 e quindi anche n è un multiplo di x. Ma allora m ed n non sono irriducibili. Abbiamo così trovato una contraddizione fra due affermazioni. Tale contraddizione è sorta dall'aver supposto arbitrariamente che $\sqrt{x}$ fosse un numero razionale: dobbiamo quindi accettare la sua negazione,che è proprio la tesi del teorema. $\square$