# Esercitazioni di Matematica Generale

**Corso di laurea in Economia e Management**

**Insiemistica e Applicazioni fra Insiemi**

**21 Settembre 2017**

**Esercizio 1.**
Determinare tutti i sottoinsiemi di $A = \{2, 3, 5\}$ e di $B = \{\{1, 2\}, 3\}$.

*Soluzione.*
Per $A$:

$$\emptyset, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \{5\}, \quad \{2,3\} \quad \{2,5\}, \quad \{3,5\}, \quad A;$$

per $B$:

$$\emptyset, \quad \{1,2\}, \quad \{3\}, \quad B.$$

**Esercizio 2.**
Dimostrare che

$$\text{a.} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C); \quad \text{b.} \quad \mathbb{N} \backslash (A \cap B) = (\mathbb{N} \backslash A) \cup (\mathbb{N} \backslash B).$$

*Soluzione.*

a. Dimostriamo che

$$(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Se $x \in (A \cap B) \cup C$, allora $x \in (A \cap B)$ o $x \in C$; se supponiamo che $x \in (A \cap B)$, allora $x \in A$ e contemporaneamente $x \in B$. Per ogni insieme $C$ che contiene $A$ e $B$, abbiamo che $x \in A \cup C$ e $x \in B \cup C$. Di conseguenza $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Se invece $x \in C$, per ogni $A$ e $B$ che contengono $C$, abbiamo che $x \in A \cup C$ e $x \in B \cup C$; di consegunza $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Viceversa, dimostriamo che

$$(A \cap B) \cup C \supseteq (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Se $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, allora $x \in A \cup C$ e contemporaneamente $x \in B \cup C$. Abbiamo 4 possibilità:

1. se $x \in A$ e $x \in B$, allora $x \in A \cap B$ e per ogni insieme $C$ che contiene $A \cap B$, si ha che $x \in (A \cap B) \cup C$;
2. se $x \in A$ e $x \in C$, allora per ogni $B$ che contiene $C$, si ha che $x \in (A \cap B) \cup C$;
3. se $x \in B$ e $x \in C$, allora per ogni $A$ che contiene $C$, si ha che $x \in (A \cap B) \cup C$;
4. se $x \in C$ e $x \in C$, allora per ogni $A \cap B$ che contiene $C$, si ha che $x \in (A \cap B) \cup C$.

b. Dimostriamo che

$$\mathbb{N} \backslash (A \cap B) \subseteq (\mathbb{N} \backslash A) \cup (\mathbb{N} \backslash B).$$

Se $x \in \mathbb{N} \backslash (A \cap B)$, allora $x \notin (A \cap B)$ e quindi $x \notin A$ e $x \notin B$. Di conseguenza, $x \in \mathbb{N} \backslash A$ oppure $x \in \mathbb{N} \backslash B$; ovvero $x \in (\mathbb{N} \backslash A) \cup (\mathbb{N} \backslash B)$.

Viceversa, dimostriamo che

$$\mathbb{N}\backslash(A \cap B) \supseteq (\mathbb{N}\backslash A) \cup (\mathbb{N}\backslash B).$$

Se $x \in (\mathbb{N}\backslash A) \cup (\mathbb{N}\backslash B)$, allora $x \in \mathbb{N}\backslash A$ oppure $x \in \mathbb{N}\backslash B$; ovvero $x \notin A$ e contemporaneamente $x \notin B$. Di conseguenza, $x \notin (A \cap B)$ che implica che $x \in \mathbb{N}\backslash(A \cap B)$.

**Esercizio 3.**
Siano $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 2 \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3x - 1 \geq 0\}$. Quale tra i seguenti insieme è $A \cup B$?

(a) $\mathbb{R}$; (b) $[-\sqrt{2}, +\infty)$; (c) $[\frac{1}{3}, \sqrt{2}]$; (d) $(\frac{1}{3}, \sqrt{2})$; (e) nessuna delle precedenti

*Soluzione.*
Notiamo che l'insieme $A$ è rappresentato da $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$, mentre l'insieme $B$ è rappresentato da $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq \frac{1}{3}\}$.

$$A \cup B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \cup x \geq \frac{1}{3} \right\} = [-\sqrt{2}, +\infty);$$

quindi la risposta esatta è la (b).

**Esercizio 4.**
Siano $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 2 > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3x - 1 \geq 0\}$. Quale tra i seguenti insieme è $A \cap B$?

(a) $\emptyset$; (b) $(-\sqrt{2}, \frac{1}{3}]$; (c) $(\sqrt{2}, +\infty)$; (d) $(\frac{1}{3}, \sqrt{2})$; (e) nessuna delle precedenti

*Soluzione.*
Notiamo che l'insieme $A$ è rappresentato da $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -\sqrt{2} \cup x > \sqrt{2}\}$, mentre l'insieme $B$ è rappresentato da $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq \frac{1}{3}\}$.

$$A \cap B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \{x < -\sqrt{2} \cup x > \sqrt{2}\} \cap x \geq \frac{1}{3} \right\} = (\sqrt{2}, +\infty);$$

quindi la risposta esatta è la (c).

**Esercizio 5.**
Determinare $A \cup B$, $A \cap B$ nei seguenti casi:

(i) $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 20\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 10\}$;

(ii) $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ pari}\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ multiplo di } 3\}$;

(iii) $A = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 > 7\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, |n - 2| < 2\}$.

*Soluzione.*

(i)

$$A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 20 \cup n \geq 10\} = \mathbb{N},$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 20 \cap n \geq 10\} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 10 \leq n < 20\};$$

(ii)
$$A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ sia multiplo di 2 o di 3}\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, \ldots\},$$
$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ sia multiplo di 6}\} = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\};$$

(iii) Dato che
$$A = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 > 7\} = \mathbb{N} \backslash \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 \leq 7\} = \mathbb{N} \backslash \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n = \{-2, -1, 0, 1, 2\}\},$$
e
$$B = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, |n-2| < 2\} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, 0 < n < 4\} = \{1, 2, 3\},$$
abbiamo
$$A \cup B = \mathbb{Z} \backslash \{-2, 1, 0\}, \quad A \cap B = \{3\}.$$

**Esercizio 6.**
Dire se le seguenti applicazioni sono iniettive e/o suriettive:

(i) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = 3n;$

(ii) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = \sqrt{n^2};$

(iii) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad \varphi(n) = \frac{n}{n+6}.$

*Soluzione.*
Ricordiamo le definizioni di iniettività e suriettività di una funzione.
**Definizione (Iniettività e Suriettività).**
Una applicazione $f : A \longrightarrow B$ è iniettiva se ad elementi distinti di $A$ corrispondono elementi distinti di $B$, ossia
$$\forall\, a_1, a_2 \in A \text{ t.c. } a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2);$$
o equivalentemente, $f$ è iniettiva se
$$\forall\, a_1, a_2 \in A \text{ t.c. } f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2.$$
Una applicazione $f : A \longrightarrow B$ è suriettiva se ogni elemento di $B$ è il corrispondente di almeno un elemento di $A$, ossia
$$\forall\, b \in B, \quad \exists\, a \in A \text{ t.c. } b = f(a).$$

(i) L'applicazione è iniettiva
$$\forall\, n_1, n_2 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(n_1) = f(n_2)\ (3n_1 = 3n_2) \Longrightarrow n_1 = n_2,$$
ma non è suriettiva; non esiste nessun $n$ tale che $\varphi(n) = 1$.

(ii) L'applicazione non è iniettiva perché $\varphi(-1) = \varphi(1)$, ma è suriettiva perché per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo $n = \sqrt{n^2} = \varphi(n)$.

(iii) L'applicazione è iniettiva perché
$$\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \Longrightarrow \frac{n_1}{n_1+6} = \frac{n_2}{n_2+6} \Longrightarrow n_1(n_2+6) = n_2(n_1+6) \Longrightarrow n_1 = n_2,$$
ma non è suriettiva perché non esiste un $n$ tale che $\varphi(n) = \frac{1}{2}$.