Esercitazioni di Matematica Generale

Corso di laurea in Economia e Management

Massimi e minimi liberi e vincolati

Esercizio 1.
Determinare massimi e minimi relativi delle funzioni negli insiemi specificati:

$$\begin{array}{rll}
\text{(i)} & f(x,y) = xe^x + y^2 & \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \\
\text{(ii)} & f(x,y) = 2x^2y - xy^2 + 2xy - y^2 & \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \\
\text{(iii)} & f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2 & \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \\
\text{(iv)} & f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + 3y^2 + 4yz + z^2 & \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \\
\text{(v)} & f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + 4y^2 + \dfrac{9z^2}{2} & \text{in} \quad \mathbb{R}^3
\end{array}$$

Soluzione.

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & (-1,0) \quad \text{punto di minimo relativo, pari a } -e^{-1} \\
\text{(ii)} & (0,0),\ (-1,0),\ (-1,-2) \text{ punti di sella ;} \\
 & \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right) \text{punto di massimo relativo pari a } \dfrac{4}{27}. \\
\text{(iii)} & (0,0),\ (0,2),\ (\pm\sqrt{2},0) \text{ punti di sella ;} \\
 & \left(\pm\sqrt{2},2\right) \text{punto di minimo relativo pari a } -8. \\
\text{(iv)} & (0,0,0) \quad \text{punto di sella .} \\
\text{(v)} & (0,0,0) \quad \text{punto di minimo relativo pari a } 0.
\end{array}$$

Esercizio 2.
Determinare massimi e minimi relativi delle funzioni negli insiemi specificati:

$$\begin{array}{rll}
\text{(i)} & f(x,y) = xy & \text{in} \quad V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 4y = 16\right\} \\
\text{(ii)} & f(x,y) = x^2y + xy^3 & \text{in} \quad V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\right\} \\
\text{(iii)} & f(x,y) = x\log(y) & \text{in} \quad V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y = 1\right\}
\end{array}$$

Soluzione.

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & (8,2) \quad \text{punto di massimo relativo, pari a } 16 \\
\text{(ii)} & \left(\sqrt[3]{2}, \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) \text{punto di massimo relativo, pari a } \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2} \\
\text{(iii)} & \left(e^{-1}, e^2\right) \text{punto di massimo relativo, pari a } 2e^{-1} \\
 & \left(-e^{-1}, e^2\right) \text{punto di minimo relativo, pari a } -2e^{-1}
\end{array}$$

Esercizio 3.
Determinare massimi e minimi assoluti delle funzioni negli insiemi specificati:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & f(x,y) = xy & \text{in} \quad V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \\ \text{(ii)} & f(x,y) = x^2 + y^2 & \text{in} \quad V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\right\} \end{array}$$

Soluzione.

(i) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ punti di massimo assoluto, pari a $\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ punti di minimo assoluto, pari a $-\frac{1}{2}$

(ii) $(\pm 1, 0)$ punti di massimo assoluto, pari a 1

$(0,0)$ punto di minimo assoluto, pari a 0.