Programma particolareggiato delle lezioni svolte nel corso CLEM di Matematica Generale, lettere M-Z, nell'anno accademico 2015/2016 dal Prof. F. Manzini.

21-9 Generalità sul corso e sulle modalità di esame. Insiemi ed elementi, sottoinsiemi, unione ed intersezione , insieme differenza, complementare, insieme delle parti, partizione di un insieme, prodotto cartesiano (cap 1 par 5.1,5.2,5.3).

22-9 Applicazioni fra insiemi, dominio e codominio, immagini e controimmagini (cap 2 par 1), iniettivitá e suriettivitá. Funzioni composte e funzione inversa (cap 2 par 5.1,5.2).

□

Insiemi numerici : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ con rispettive proprietá algebriche, relazione d'ordine $\leq$, irrazionalitá di $\sqrt{2}$ (cap 1 par 1,2,3)

23-9 Insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, assioma di Dedekind; insiemi finiti ed insiemi numerabili, numerabilitá di $\mathbb{Z}$ (cap 1 par 8,8.2). Cenni alla non numerabilitá di (0,1). Sistema di ascisse su una retta e topologia di $\mathbb{R}$: intervalli propri ed impropri (cap 1 par 6,6.1), intorno di un punto, intorno destro e sinistro di un punto, punti interni ed esterni di un insieme, insiemi aperti e chiusi, punti di frontiera (cap 10 par 2).

28-9 Punti isolati, punti di accumulazione, massimo, minimo (cap 1 par 6,6.1), maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore di un insieme. Esempi svolti in aula.
Funzioni reali di variabile reale, iniettive e suriettive; Funzioni lineari affini $f(x) = mx + q$: iniettivitá e suriettivitá.

30-9 Funzioni monotone (cap 2 par 6.2), pari e dispari (cap 2 par 7). Interpretazione geometrica del coefficiente angolare, intercetta di una retta (cap 2 par 3), parallelismo, retta per un punto del piano cartesiano. Equazione esplicita ed implicita della retta, parallelismo , incidenza e perpendicolaritá, rette per un punto e per due punti in entrambi i casi. Funzione radice quadrata e valore assoluto (cap 2 pag 66).

1-10 Definizione di polinomio generico, radice di un polinomio, polinomi di primo grado e secondo grado, radici. Caso $\Delta < 0$: numeri complessi; proprietá algebriche dei numeri complessi. Piano di Argand-Gauss e cenni alla rappresentazione trigonometrica di un numero complesso. Esempi svolti in aula.
Teorema fondamentale dell'algebra, teorema di Ruffini, fattorizzazione dei polinomi in $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ ed in $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$. Soluzioni delle disequazioni di primo e secondo grado. Esempi svolti in aula. Grafici dei trinomi di secondo grado.

5-10 Funzioni fratte: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x(x+1)}$: studio del dominio, iniettivitá e suriettivitá. Funzione radice cubica. Disequazioni fratte ed irrazionali. Soluzione in aula di

$$\sqrt{2x-1} - x \geq 0, \quad -\sqrt{3x+1} + x \geq 0, \quad \sqrt[3]{x^3 + x - 1} \geq x$$

Regola di Ruffini; inizio dello studio di funzione: dominio, segno e intersezione con gli assi di:

$$\frac{3x-1}{1-x}, \quad \frac{1}{2x-2}+\frac{3x}{x-2}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}, \quad \sqrt{\frac{x-3}{x^2-3x+2}},$$
$$\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-3x+2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}-x}$$

7-10 Funzioni esponenziali e logaritmiche (cap 2 par 8.1, 8.2).
Svolte in aula :

$$\log\left(x^2-3x+2\right), \quad \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right), \quad \frac{\log(x)}{\log(x)-1}, \quad \frac{1}{\log(x)+1},$$
$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x)-1}$$

Funzioni assegnate:

$$e^x - e^{\frac{1}{x}}, \quad e^{\sqrt{x^2-x}} - e^{\sqrt{x}}$$

8-10 Funzioni trigonometriche: $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ e loro inverse.(cap 2 par 8.3). Dominio e segno di :

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}$$

Funzioni assegnate:

$$\sin(\log(x))$$

12-10 Generalitá sulle successioni (cap 3 par 1.1), monotonia (cap 2 def 6.2), convergenza e divergenza (cap 3 par 1.1-1.3), successioni indeterminate (cap 3 def 1.4); successioni limitate, comportamento asintotico delle geometriche (cap 3 teor 3.1,par 3.2). Esempi vari, tra i quali dimostrare che :

$$\lim_n n^2 = +\infty$$
$$\lim_n x^n = +\infty \quad \text{per} \quad x>1$$
$$\lim_n x^n = 0 \quad \text{per} \quad 0<x<1$$
$$\lim_n \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

14-10 Comportamento asintotico delle successioni monotone; teoremi sulle successioni: unicitá del limite (cap 3 par 1.5), confronto (cap 3 teor 5.1), due carabinieri (cap 3 teor 5.2), permanenza del segno.
Limiti di somme, prodotti, quozienti di successioni (cap 3 par 5.2). Esempi vari

15-10 limite di $a_n^{b_n}$. Tutte le 7 forme indeterminate, confronto tra successioni divergenti (cap 3 par 6.1) :

$$log^{\alpha}(n), \quad n^{\beta}, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n \quad \forall \quad \alpha>0, \beta>0, a>1$$

; alcuni limiti notevoli:

$$\lim_n n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1,\quad \lim_n\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{h}}=e^{\frac{k}{h}},\quad \lim_n n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

Successioni infinitesime ed infinite (cap 3 par 6.1,6.2), confronto tra infinitesimi ed infiniti. Esempi di successioni.
Serie numeriche : convergenza, divergenza, indeterminazione (cap 6 def 1.1,1.2); esempi:

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)},\quad \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Serie geometriche e loro comportamento asintotico. (cap 6 par 2). Esempi assegnati.

19-10 Serie a termini di segno costante, condizione necessaria di convergenza (cap 6 teor 4.1), criterio del confronto per serie a termini di segno costante(cap 6 teor 4.2), serie armonica e armonica generalizzata (cap 6 esem 4.1), criterio di Leibniz.
Le funzioni: limiti all'infinito, finiti o no. Cenni a funzioni che non ammettomo limite. Esempi vari.

21-10 Definizione di limite, finito o no, al finito. Teorema ponte(cap 3 par 2), esempi di funzioni che non ammettono limite :

$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)\quad \text{in}\quad x_0=0;\quad g(x)=\sin(x)\quad \text{a}\quad \pm\infty.$$

Teoremi sulle operazioni tra limiti (cap 3 par 5.2); del confronto (cap 3 teor 5.1), dei carabinieri (cap 3 teor 5.2), della permanenza del segno.
Calcolo del limite

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin(x)}{x}=0$$

Studio del dominio, segno e limiti di:

$$f(x)=e^x-e^{\frac{1}{x^2}}$$

22-10 Limiti destro e sinistro di una funzione (in un punto) finito o no (cap 3 par 2.1,2.2), esempi vari. Relazione fra limiti destri e sinistri di una funzione in un punto e limite della stessa nello stesso punto. Asintoti orizzontali e verticali.
Calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

con argomentazioni geometriche (cap 3 es 5.11). Funzioni infinitesime ed infinite al finito ed all'infinito; confronti fra due funzioni infinitesime/infinite (cap 3 par 6). Esempio di infinitesimi non confrontabili:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \forall x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\quad \text{e}\quad g(x)=x\quad \text{in}\quad x_0=0.$$

Esempio di infiniti non confrontabili:

$$f(x)=2x+x\sin(x)\quad \text{e}\quad g(x)=x\quad \text{per x}\to+\infty.$$

Infinitesimi ed infiniti campione al finito ed all'infinito. Ordine di infinitesimo o di infinito al finito e all'infinito. Esempi vari.

26-10 Calcolo dei limiti all'infinito dei polinomi e delle funzioni razionali fratte (cap 3 esempi pag 90). Presentazione di alcuni limiti notevoli (cap 3 teor 6.1). Continuitá di una funzione , in particolare verifica della continuitá di

$$f(x) = mx + q, \quad m \neq 0; \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

combinazione lineare di funzione continue, prodotto, quoziente di funzioni continue (cap 4 par 1,2); discontinuitá (cap 4 par 2.2 pag 99)e loro classificazione; Teorema della permanenza del segno, di Weierstrass (cap 4 teo 3.4), dei valori intermedi (cap 4 teo 3.2), degli zeri (cap 4 teo 3.1); esempi e controesempi vari. Definizione di asintoto orizzontale/obliquo ed esempi (cap 3, pag 76-77, pag 91).

28-10 Calcolo di alcuni limiti notevoli (cap 3 par 5.4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} x^{\sin(x)} = 1$$

Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica, equazione della retta tangente (cap 5 par 1). Derivate destre e sinistre di una funzione in un punto (cap 5, def 1.4), funzioni non derivabili (p.ti angolosi, p.ti di cuspide e p.ti a tangente verticale).

29-10 Relazione tra continuitá e derivabilitá di una funzione in un punto (cap 5, par 1.1). Regole classiche di derivazione (cap 5, par 3,4), tabella delle derivate elementari (cap 5, par 2)ed esempi vari; derivata di $f(x)^{g(x)}$. Punti di massimo e minimo locali (cap 2, def 6.7), teorema di Fermat sui punti stazionari (cap 5, teor 7.1), crescenza / decrescenza di una funzione e segno della derivata prima (cap 5, par 9).

4-11 Esercitazione in aula.

9-11 Massimi e minimi locali e globali di una funzione (cap 2, def 6.3). Esempi svolti in aula:

$$\frac{x|x| + 2x + 1}{|x|}, \quad \frac{\log(x)}{x}, \quad xe^{\frac{1}{x}}, \quad \left(x^2 - 8\right) e^x$$

11-11 Convessitá, concavitá di funzioni, punti di flesso, interpretazione geometrica e caratterizzazione analitica (cap 5, par 12). Esempi (gli stessi del 9-11).

12-11 Differenziale, polinomio e formula di Taylor; valutazione dell' infinitesimalitá del resto. Cenni allo sviluppo in serie di Taylor di una funzione (cap 7, par 7.2 def 7.1 e parte del teor 7.5). Polinomi di Taylor delle funzioni:

$$\sqrt{x}, \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad e^x, \quad \log(x+1)$$

Calcolo di alcuni limiti con l'utilizzo della formula di Taylor. Cenni al confronto (figura 1) tra il grafico della funzione $\sin(x)$ ed i polinomi di Taylor di ordine 1 e 3 di essa centrati nel punto $x_0 = 0$.

Caratterizzazione dei punti stazionari di una funzione mediante il valore delle derivate "successive" calcolate in essi (cap 7, par 7.3 teor 7.6-7.7).

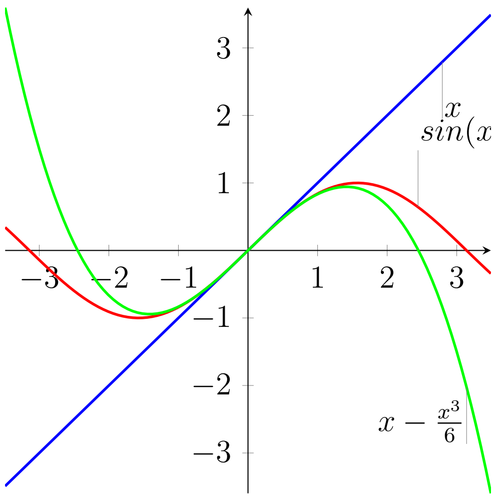

Figura 1: Confronto tra la funzione e approssimazioni dei polinomi di Taylor.

16-11 Teoremi di Rolle, Lagrange, (cap 5, par 8), Hospital (cap 5, par 10). Calcolo di alcuni limiti.

18-11 Studio completo delle funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \geq 0 \\ x^2 + 2x & \forall x < 0 \end{cases}$$
$$f(x) = x^4(x-1)^3$$

Definizione di primitiva (cap 7, def 4.1), integrale indefinito (cap 7, par 5), regola di sostituzione immediata (cap 7, par 5.4). Tabella degli integrali indefiniti delle funzioni elementari; calcolo di alcuni integrali indefiniti.

19-11 Integrale definito e funzioni integrabili (secondo Riemann) (cap 7, par 1,2), Teorema della media integrale per funzioni limitate ed integrabili e per funzioni continue (cap 7, par 3.2); esempio di funzione non integrabile (secondo Riemann) nell'intervallo $[0,1]$: la funzione di Dirilichet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Proprietá dell'integrale definito (cap 7, par 3.1). Teorema di Torricelli - Barrow e calcolo dell'integrale definito (cap 7, par 4).

25-11 Metodi di integrazione per parti e per sostituzione (cap 7, par 5.3,5.4). Esempi svolti in aula. Cenni all'integrazione di alcune funzioni razionali:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)(x-x_1)} \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{(x-x_0)^2}$$

$\square$

Definizione e proprietá degli spazi vettoriali. $\mathbb{R}^n$, spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) (cap 8, par 1,2) e sue proprietá : somma e prodotto per uno scalare, ordinamento (parziale). Vettori riga e colonna, combinazioni lineari tra vettori (cap 3, par 2.1).

26-11 Prodotto scalare, norma e distanza tra 2 punti (cap 8, par 3), sottospazi vettoriali (cap 8, par 4), vettori ortogonali, sottospazio generato da un insieme di vettori(cap 3, microt 4.1), dipendenza ed indipendenza lineare lineare e loro proprietá (cap 3, par 5) .Esempi vari. Ortogonalitá ed indipendenza, Rango di insiemi di vettori, base di uno spazio vettoriale, base canonica (cap 8, esem 4.1), coordinate di un vettore. Esempi vari.

27-11 Dimensione di spazio vettoriale (cap 8, par 6). Definizione di sistema lineare (cap 9, par 1). Matrici e loro proprietá ,tra cui il prodotto righe per colonne ,matrici trasposte e simmetriche, matrici diagonali, triangolari superiori ed inferiori, matrice identitá (cap 8, par 7,8,8.2). Determinante di una matrice quadrata, sviluppo di Laplace. Proprietá dei determinanti (cap 8, par 9,9.1). Definizione e calcolo matrice inversa (cap 8, par 8.3,10). Scrittura di un sistema lineare nella forma:

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

(cap 9, par 1,1.2)

30-11 Rango di una matrice (cap 8, par 11), teorema di Kronecker. Dimensione degli spazi vettoriali generati da un insieme finito di vettori; relazioni fra rango di n vettori di $\mathbb{R}^n$, dipendenza lineare degli stessi, determinante della matrice costruita con essi. Teorema di Cramer ed espressione della soluzione nella forma

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$

(cap 9, par 2). Teorema di Rouché - Capelli (cap 9, par 3,3.1) (prima e seconda parte). Esempi vari.

2-12 Sistemi lineari omogenei e loro soluzioni (cap 9, par 4.1). Esercizi svolti in aula:

Studiare , al variare di $t \in \mathbb{R}$, le soluzioni dei sistemi lineari seguenti:

$$\begin{cases} x + tz = 1 \\ -tx + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + tz = 1 \\ 2x + ty + 4z = 5 \end{cases}$$

3-12 Matrici reali simmetriche definite positive e negative, semidefinite positive e negative, indefinite. Caratterizzazione delle matrici definite positive e negative (cap 10, par 4); esempi. Eserciti sugli spazi vettoriali.

$\square$

9-12 Cenni alla topologia standard di $\mathbb{R}^2$, insiemi aperti, chiusi e limitati; funzioni reali di due variabili reali: dominio (esempi svolti in aula), continuitá (cap 10, pag 292); definizione di massimo e minimo relativo ed assoluto (cap 10, pag 287)(vedi figura 2 e 3 rispettivamente); teorema di Weierstrass (cap 10, teor 5.1),derivate parziali (esempi svolti in aula)(cap 10, par 6), differenziabilitá (cap 10, par. 7), equazione del piano tangente (esempi svolti in aula)(cap 10, pag 296),curve di livello (cap 10, par. 1.2) (vedi figura 5), relazione tra curve di livello di una funzione e il vettore gradiente (cap 10, pag 297 microt. 7.1).

10-12 Condizioni del primo ordine per i punti di estremo locale (cap 10, par 11, teor 11.1), formula di Taylor arrestata al differenziale di secondo ordine (cap 10, par 9,9.1,9.2), condizioni del secondo ordine per i punti interni di estremo locale (cap 10, par 11.2, teor 11.2). Punti di sella: vedi figura 4. Esempi svolti in aula: determinare massimi e minimi locali/assoluti delle funzioni $f(x,y)$ negli insiemi specificati

$$f(x,y) = xe^x + y^2 \quad in \quad \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = 2x^2y - xy^2 + 2xy - y^2 \quad in \quad \mathbb{R}^2$$

Determinazione dei punti di massimo e minimo vincolati ,locali ed assoluti, tramite l'utilizzo della funzione Lagrangiana (cap 10, pag 317); Hessiana della Lagrangiana (cap 10, teor 12.2). Esempi svolti in aula: determinare massimi e minimi locali/assoluti delle funzioni $f(x,y)$ negli insiemi specificati

$$f(x,y) = xy \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 4y = 16\}$$
$$f(x,y) = x^2y + xy^3 \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$
$$f(x,y) = xy \quad nell' \quad insieme \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

11-12 Altri esempi svolti in aula.

□

Gli argomenti sottolineati sono comprensivi di dimostrazione.
Testi di riferimento:

1. Matematica per l'economia e l'azienda. L.Peccati, S.Salsa, A.Squellati - Egea - III ed. (riferimenti in blu)
2. Matematica Generale. Simon, Blume - Egea 2007 (riferimenti in verde).
3. Esercizi di Matematica Generale, A.Bersani, F.Manzini, L. Mastroeni, Esculapio Ed.

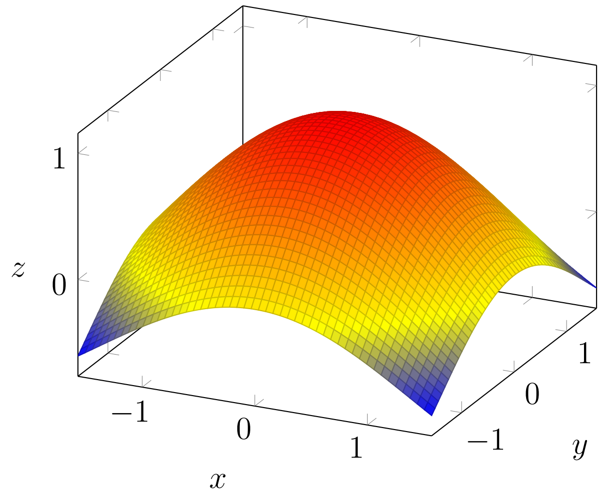

Figura 2: $z = \cos(x^2 + y^2)$ in un intorno dell'origine

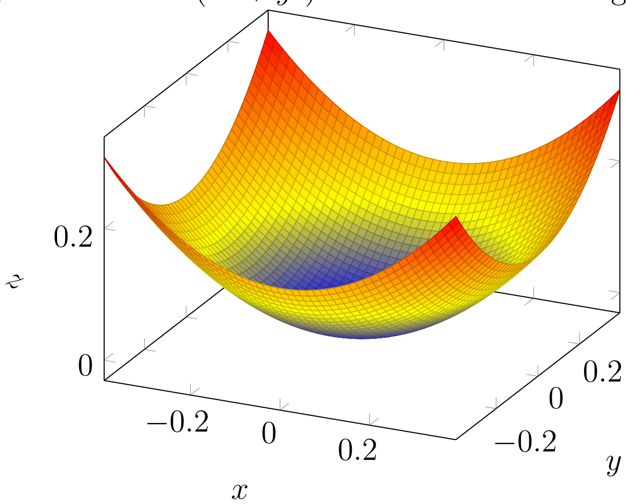

Figura 3: $z = x^2 + y^2$ in un intorno dell'origine

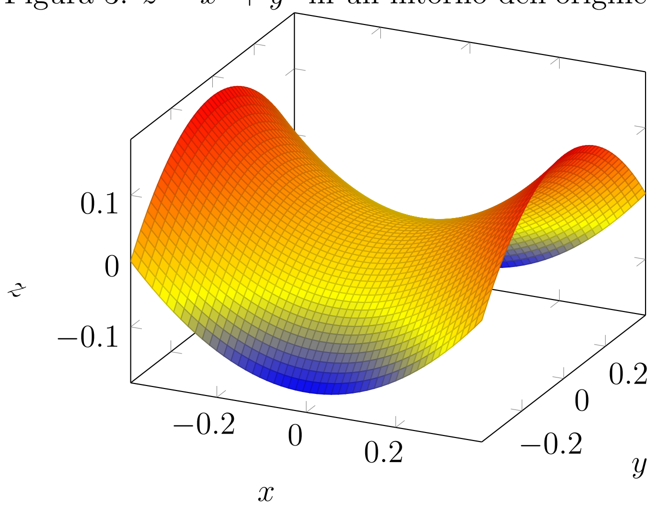

Figura 4: $z = x^2 - y^2$ in un intorno dell'origine

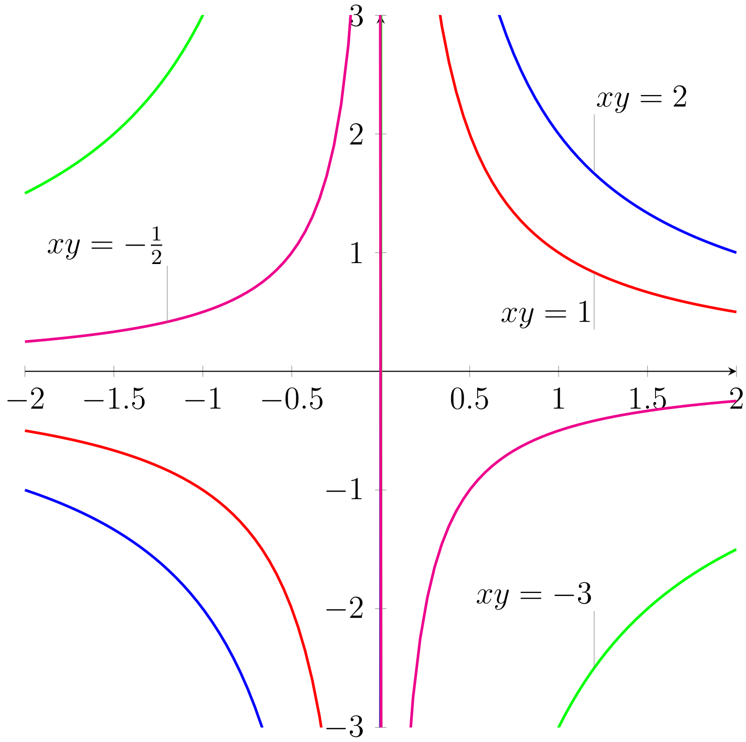

Figura 5: Curve di livello della funzione $f(x, y) = xy$