

LUISS G. Carli

Facoltà di Economia

APPUNTI PER IL CORSO DI *MACROECONOMIA*

Prof. Alberto Petrucci

”LA CRESCITA ENDOGENA”

Novembre 2006

# 1 Introduzione

Lo scopo di questi appunti è quello di esporre in maniera elementare e intuitiva i principi teorici fondamentali della "crescita endogena". Essi si prefiggono d'integrare i capitoli dedicati allo sviluppo economico che si trovano nel manuale *Macroeconomia* di Mankiw (Zanichelli, 2004), in cui viene presentata essenzialmente la teoria (neoclassica) della "crescita esogena".

La modalità operativa impiegata in queste note per generare sviluppo autopropulsivo è quella di considerare una tecnologia (differente rispetto a quella postulata nel modello di Solow) che incorpori l'ipotesi di rendimenti dei fattori produttivi accumulabili sono costanti; se i rendimenti di tali *input* fossero crescenti si avrebbe "crescita endogena", ma non tassi di sviluppo costanti in una situazione di stato stazionario.

Le principali teorie della "crescita endogena" vengono analizzate (rispetto alle elaborazioni teoriche originarie) in versione molto semplificata, tramite schemi analitici che presentano, nelle varie accezioni teoriche, un denominatore comune relativamente alla tecnologia. In particolare, questi appunti considerano i seguenti modelli di sviluppo endogeno: 1) il modello AK; 2) il modello con spesa pubblica produttiva; 3) il modello con accumulazione del capitale umano; e 4) il modello del "learning by doing".<sup>1</sup>

## 2 Il modello AK (Rebelo, 1991)

Il modello AK costituisce uno schema teorico semplice e sufficientemente generale per analizzare la crescita endogena; tale apparato formale rappre-

---

<sup>1</sup>Per un'analisi particolareggiata e relativamente semplice delle diverse teorie dello sviluppo economico endogeno si rimanda a Daveri (1997), Jones (1998) e Boggio-Seravalli (2003).

senta un paradigma di riferimento a cui possono essere in un certo qual modo ricondotti tutti gli altri modelli di crescita endogena qui presentati.

Si consideri un'economia chiusa di tipo reale, popolata da famiglie, imprese e settore pubblico. Il sistema economico è descritto dalle seguenti equazioni:

$$S_P = s(Y - T), \quad 0 < s < 1, \quad (1)$$

$$I = \Delta K + \delta K, \quad (2)$$

$$S_P + (T - G) = I, \quad (3)$$

$$T = \tau Y, \quad 0 \leq \tau < 1, \quad (4)$$

$$T = G, \quad (5)$$

$$Y = AK, \quad (6)$$

dove

$S_P$ =risparmio privato aggregato in termini reali;

$Y$ =produzione aggregata in termini reali;

$T$ =volume dell'imposizione fiscale in termini reali;

$I$ =investimento lordo in termini reali;

$\Delta( )$ =operatore variazione assoluta;

$K$ =*stock* di capitale fisico;

$\Delta K = \frac{\Delta K}{\Delta t} \approx \frac{dK}{dt}$  = investimento netto (tasso di accumulazione del capitale fisico nell'unità di tempo);

$G$  = spesa pubblica in conto corrente (o spesa pubblica improduttiva);

$s$  = propensione media al risparmio (costante);

$\delta$  = coefficiente di ammortamento (costante);

$\tau$  = aliquota media d'imposta (costante);

$A$  = produttività media del capitale (costante).

L'equazione (1) fornisce la funzione del risparmio privato; in base ad essa il risparmio delle famiglie è proporzionale al reddito disponibile.

L'equazione (2) rappresenta l'investimento lordo, dato dall'accumulazione del capitale fisico e dagli ammortamenti (che si suppongono proporzionali allo *stock* di capitale). La relazione (3) identifica la condizione di equilibrio sul mercato reale, data dall'uguaglianza tra risparmio totale (privato e pubblico) e investimenti lordi. La relazione (4) postula che l'imposizione fiscale sia proporzionale al reddito. La condizione (5) costituisce l'ipotesi di un bilancio pubblico in pareggio, ossia di entrate statali pari alle uscite pubbliche.

L'equazione (6) è la funzione di produzione, la quale ipotizza che il volume di prodotto è proporzionale allo *stock* di capitale. La differenza fondamentale tra il modello (1)-(6) e quello neoclassico di crescita esogena è rappresentata dalla tecnologia impiegata; nel presente contesto il rendimento del capitale, pari alla sua produttività media/marginale, è costante, e non decrescente nello *stock* di capitale, come invece ipotizzato nel modello di Solow.

Inserendo  $T = \tau Y$  nella (1), si ottiene la funzione del risparmio privato inclusiva dell'imposizione fiscale

$$S_P = s(1 - \tau)Y. \quad (1')$$

Si osservi che la propensione (media e marginale) a risparmiare reddito

disponibile è  $s$ , mentre quella a risparmiare reddito effettivo è  $s(1 - \tau) \leq s$ .

Sostituendo le relazioni (1'), (2) e (5) nella condizione di equilibrio sul mercato reale (3), nonché impiegando la funzione di produzione  $Y = AK$ , si ottiene:

$$s(1 - \tau)AK = \Delta K + \delta K,$$

da cui si ricava il seguente tasso di crescita di equilibrio del capitale fisico

$$\gamma_K = \frac{\Delta K}{K} = s(1 - \tau)A - \delta. \quad (7)$$

$\gamma_K$  è positivo se l'economia è sufficientemente produttiva ossia se  $s(1 - \tau)A > \delta$ .<sup>2</sup> Poiché il rapporto prodotto-capitale è costante ( $\frac{Y}{K} = A$ ), *output* e *stock* di capitale si espandono allo stesso tasso di crescita percentuale, ossia  $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta K}{K} = \gamma_K = \gamma$ .

Il tasso di crescita dell'economia,  $\gamma$ , è costante ed è legato ad elementi strutturali, quali la propensione al risparmio, la pressione fiscale  $\tau$ , la produttività media del capitale e il tasso di deprezzamento del capitale.<sup>3</sup> In questo senso  $\gamma$  è "endogeno". Poiché  $\gamma$  è costante, il livello di *output* si muove nel tempo secondo la legge funzionale:  $Y(t) = Y_0 e^{\gamma t}$ , dove  $Y(t)$  rappresenta il prodotto in funzione del tempo,  $Y_0$  è il livello di *output* iniziale e  $t$  individua la variabile tempo.<sup>4</sup>

---

<sup>2</sup>Si noti che nel caso particolare in cui  $\tau = 0$ , e quindi  $G = 0$ , il modello si riferisce al solo settore privato.

<sup>3</sup>Si osservi che il presente modello non esibisce alcuna dinamica di transizione, essendo la relazione (7) la soluzione di stato stazionario del tasso di crescita del prodotto.

<sup>4</sup>Al fine di comprendere perchè una variabile che si espande a tasso costante segue, quando viene espressa ai livelli, una legge evolutiva di tipo esponenziale, si può procedere come segue. Dalla definizione del tasso di crescita percentuale del reddito, che possiamo

La condizione necessaria per avere uno "sviluppo economico endogeno" è che il rendimento del fattore accumulabile, in questa circostanza il capitale fisico, sia costante o più in generale non decrescente.

Il modello prevede che variazioni degli elementi strutturali dell'economia - quali  $s$ ,  $\tau$ ,  $A$  e  $\delta$  - esercitino un effetto permanente sul tasso di sviluppo economico di lungo periodo, a differenza del modello di Solow in cui hanno effetti temporanei sul tasso di accumulazione del capitale fisico e permanenti soltanto sull'intensità fattoriale e sul livello di prodotto *pro capite*.

Se si considerasse una popolazione  $L$  (pari alla forza lavoro e all'occupazione) che si evolve al tasso costante  $n$ , il tasso di crescita dell'*output pro capite* sarebbe pari a

$$\gamma_{\frac{Y}{L}} = \frac{\Delta(Y/L)}{(Y/L)} = s(1 - \tau)A - \delta - n. \quad (7')$$

La maggior parte della letteratura sulla crescita endogena può essere vista come un tentativo di comprendere le determinanti del parametro  $A$ . Il modello AK è particolarmente importante poiché, pur nella sua semplicità, consente di vedere tutti gli altri modelli di crescita endogena come estensioni e/o microfondazioni di esso.

---

scrivere (optando per la versione in tempo continuo) come  $\frac{dY}{Y} = \gamma dt$ , si ottiene, integrando ambo i membri e applicando semplici regole d'integrazione,

$$\ln Y = Z + \gamma t,$$

dove  $Z$  è la costante d'integrazione. In termini di livello abbiamo che  $Y(t) = e^Z e^{\gamma t}$ ; ponendo  $t = 0$ , si ottiene che  $Y(0) = Y_0 = e^Z$  e quindi che  $Y(t) = Y_0 e^{\gamma t}$ .

### 3 Il modello con spesa pubblica produttiva (Barro, 1990)

Il modello di Barro si basa sull'ipotesi che la spesa pubblica sia argomento della funzione di produzione. Si tratta ovviamente di una spesa statale in infrastrutture ossia di spesa pubblica in conto capitale. L'idea di fondo è che un aumento delle infrastrutture disponibili nel sistema economico renda più produttivo il capitale fisico, perchè ne accresce il relativo rendimento essendo capitale e spesa pubblica infrastrutturale fattori produttivi complementari nella produzione.

La tecnologia può essere descritta tramite la seguente funzione di produzione:

$$Y = BK^\beta G_K^{1-\beta}, \quad (8)$$

dove  $G_K$  rappresenta la spesa pubblica in infrastrutture, mentre  $B > 0$  e  $0 < \beta < 1$  sono parametri tecnologici. Per semplicità si è ipotizzata una struttura produttiva Cobb-Douglas.

Si supponga che il settore pubblico persegua una condizione di bilancio pubblico in pareggio, mantenendo le uscite, date da  $G_K$  (poichè la spesa pubblica improduttiva viene supposta nulla), esattamente pari alle entrate statali, date (in presenza di un'imposizione proporzionale sul reddito) da  $T = \tau Y$ . Dopo aver utilizzato la funzione di produzione (8), il vincolo di bilancio del settore pubblico può essere espresso come

$$G_K = \tau BK^\beta G_K^{1-\beta}. \quad (9)$$

Risolvendo la (9) per la spesa pubblica infrastrutturale si ottiene:

$$G_K = (\tau B)^{\frac{1}{\beta}} K. \quad (9')$$

La relazione (9') fornisce il livello di spesa pubblica compatibile con il pareggio del bilancio pubblico, una volta che sono state considerate, tramite la funzione di produzione, le interdipendenze tra spesa statale e gettito fiscale.

Sostituendo l'espressione della spesa pubblica (9') nella funzione di produzione (8), si ricava una tecnologia inclusiva del vincolo di bilancio del settore pubblico che presenta, come nel modello AK, rendimenti costanti rispetto al capitale privato (ossia il fattore accumulabile)

$$Y = A_G K, \quad (9'')$$

dove  $A_G = B (\tau B)^{\frac{1-\beta}{\beta}}$ .

Un maggiore livello di  $\tau$  -che nella presente impostazione rappresenta sia la pressione fiscale che la dimensione relativa del settore pubblico (in quanto  $\tau = \frac{G_K}{Y}$ )- accresce il volume di prodotto in quanto incrementa la produttività totale del capitale. Inoltre dalla relazione (9'') si evince che, essendo la produttività media del capitale costante, capitale fisico e *output* crescono allo stesso tasso:  $\gamma_K = \gamma_Y = \gamma$ .

Il modello completo dell'economia può essere scritto in versione ridotta come segue

$$S_P = s(1 - \tau)Y, \quad (10)$$

$$I = \Delta K + \delta K, \quad (11)$$

$$S_P = I, \quad (12)$$



$$Y = A_G K. \quad (13)$$

Si noti che la usuale condizione di equilibrio sul mercato dei beni in presenza del settore pubblico, data da  $S_P + (T - G_K) = I$ , equivale alla condizione (12) in base all'ipotesi di bilancio statale in pareggio ( $T = G_K$ ).

L'uguaglianza risparmi-investimenti comporta che valga la relazione

$$s(1 - \tau)A_G K = \Delta K + \delta K.$$

Conseguentemente il tasso di sviluppo dell'economia è dato da

$$\gamma = \frac{\Delta K}{K} = s(1 - \tau)A_G - \delta. \quad (14)$$

E' evidente l'analogia della (14) con la (7). Accanto alle caratteristiche già evidenziate per il modello AK, si osservi nella relazione (14) il ruolo articolato (rispetto al semplice modello di Rebelo, 1991) svolto da  $\tau$ . Nella presente circostanza  $\tau$  esercita un effetto ambiguo su  $\gamma$ ; infatti da un lato la dimensione relativa del settore pubblico incrementa il rendimento del capitale privato stimolandone la relativa accumulazione, ossia  $\frac{dA_G}{d\tau} > 0$ , mentre dall'altro la maggiorazione di  $\tau$  scoraggia l'accumulazione di capitale fisico attraverso una riduzione del risparmio privato derivante dalla indotta decurtazione del reddito disponibile.<sup>5</sup> E' da rilevare che se l'incremento della spesa pubblica produttiva non fosse finanziato con una maggiorazione delle imposte, ma con risorse che non si ripercuotono sulle scelte di risparmio delle famiglie (per esempio con i "fondi strutturali" dell'Unione Europea), sarebbe

---

<sup>5</sup>Il legame tra  $\gamma$  e  $\tau$  è rappresentabile da una "funzione a U rovesciata" (*the Barro bell*); per bassi livelli di  $\tau$ , il legame tra aliquota d'imposta e tasso di crescita dell'economia è positivo, mentre, dopo aver raggiunto un punto di massimo, per alti livelli di  $\tau$  tale legame diventa negativo.

presente soltanto il primo effetto e il legame tra  $\gamma$  e  $\tau$  sarebbe senza alcun ambiguità positivo.

## 4 Il modello con capitale umano (Lucas, 1988)

La teoria di Lucas considera il capitale umano come ulteriore fattore della produzione. In questa sede viene presentata una versione semplificata del modello di Lucas, nella quale si considera un solo settore produttivo e non si incorpora nell'analisi (in maniera esplicita) un processo di accumulazione del capitale umano che avviene attraverso l'attività di studio degli agenti economici.

Ipotizzando per semplicità una funzione di produzione Cobb-Douglas, la tecnologia può essere espressa come:

$$Y = BK^\beta H^{1-\beta}, \quad (15)$$

dove  $H$  rappresenta lo stock di capitale umano, mentre  $B$  e  $\beta$  identificano i consueti parametri che caratterizzano la tecnologia.<sup>6</sup> E' da notare che in questa funzione di produzione tutti gli *input* possono essere accumulati e quindi ci sono rendimenti di scala costanti rispetto ai fattori accumulabili.

Supponendo che l'attività produttiva venga svolta da imprese che operano in un contesto concorrenziale (sul mercato dell'*output* e degli *input*) e perseguono l'obiettivo del massimo profitto, le domande dei due fattori produttivi derivano dalle condizioni di produttività marginali uguali ai rispettivi prezzi, ossia

---

<sup>6</sup>Per semplicità, sono stati utilizzati gli stessi simboli visti per la funzione di produzione del modello del paragrafo 2.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \beta B K^{\beta-1} H^{1-\beta} = R_K,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial H} = (1 - \beta) B K^{\beta} H^{-\beta} = R_H,$$

dove  $R_K$  e  $R_H$  rappresentano rispettivamente il costo d'uso del capitale fisico e umano, dati parametricamente per le imprese.

Ipotizzando che i due tipi di capitale siano perfettamente sostituibili, il rendimento del capitale fisico e umano deve essere il medesimo al netto del tasso di deprezzamento degli stessi (dato rispettivamente da  $\delta_K$  e  $\delta_H$ ):  $R_K - \delta_K = R_H - \delta_H$ . Quindi uguagliando queste due espressioni si ha

$$\beta \left( \frac{H}{K} \right)^{1-\beta} = \frac{(\delta_K - \delta_H)}{B} + (1 - \beta) \left( \frac{H}{K} \right)^{-\beta}. \quad (16)$$

Supponendo che il tasso di deprezzamento del capitale fisico sia superiore a quello del capitale umano,  $\delta_K > \delta_H$ , esiste un'unico rapporto positivo tra capitale umano e capitale fisico di equilibrio. Risolvendo la condizione di arbitraggio tra i rendimenti dei due tipi di capitale, si ottiene la seguente intensità fattoriale di equilibrio:

$$\frac{H}{K} = \Gamma \left( \frac{\delta_K - \delta_H}{B}, \beta \right) = \bar{Z} > 0, \quad (17)$$

dove  $\Gamma(\ )$  individua una funzione implicita. Dalla relazione (17) si desume che il rapporto tra capitale umano e capitale fisico è fisso, essendo legato a soli parametri costanti, e quindi che i due *stock* di capitale si evolvono nel tempo allo stesso tasso di crescita.

Sostituendo l'intensità fattoriale di equilibrio (17) nella funzione di produzione (15), abbiamo:

$$Y = A_H K, \quad (18)$$

dove  $A_H = B \bar{Z}^{1-\beta}$ .

Come risulta chiaro dalla relazione (18), si ritorna allo schema della funzione di produzione vista per il modello AK; quindi il tasso di crescita del sistema può essere ricavato di conseguenza in maniera semplice, con  $A_H$  che sostituisce  $A$  nella formula (7). E' da notare che nel presente contesto i differenziali di crescita tra paesi possono essere spiegati, tra le altre cause, dalla differente dotazione di capitale umano per unità di capitale fisico ( $\bar{Z}$ ), che comporta un differente rendimento del capitale privato.

## 5 Il modello del "learning by doing" (Romer, 1986)

Il modello di Romer si fonda sull'idea che la produttività del lavoro aumenta in seguito all'esperienza accumulata dal lavoratore, poiché l'acquisizione di conoscenza (*learning*) è collegata all'esperienza (*doing*).<sup>7</sup> L'esperienza acquisita può essere approssimata dagli investimenti cumulati nel tempo che sono stati registrati nel sistema economico, ossia dallo *stock* di capitale aggregato dell'economia. Si tratta di un elemento che rappresenta un'esternalità positiva per la singola impresa, essendo il rendimento del capitale da esse impiegato legato a quanto capitale ha accumulato nel tempo l'economia nel suo complesso. Imprese che operano in sistemi economici in cui lo *stock* di capitale aggregato è maggiore riscontrano una produttività degli *input* (tra

---

<sup>7</sup>Si tratta di un'ipotesi formulata originariamente da Kenneth Arrow negli anni Sessanta.

cui in particolare quella del lavoro) più alta.

Si consideri la seguente funzione di produzione relativa alla  $i$ -esima impresa

$$Y_i = BK_i^\beta (KL_i)^{1-\beta}, \quad (19)$$

dove  $Y_i$ ,  $K_i$  e  $L_i$  rappresentano rispettivamente il livello di *output*, di capitale fisico e di lavoro della  $i$ -esima impresa, mentre  $K$  identifica lo *stock* di capitale aggregato (corrispondente alla cumulata degli investimenti netti nel tempo).  $K$  influisce positivamente sulla produttività del lavoro, aumentando l'efficienza produttiva tramite l'esperienza.

Considerando un sistema produttivo di concorrenza perfetta, popolato da  $m$  imprese tutte uguali, si ha che, in una condizione di equilibrio di lungo periodo, tutte le imprese hanno lo stesso impiego dei fattori produttivi, ossia  $K_i = \frac{K}{m}$  e  $L_i = \frac{\bar{L}}{m}$ , dove  $\bar{L}$  rappresenta la dotazione complessiva di lavoro (esogena). Sostituendo la quantità dei fattori produttivi di equilibrio nella funzione di produzione della  $i$ -esima impresa, otteniamo

$$Y_i = B \left( \frac{K}{m} \right)^\beta K^{1-\beta} \left( \frac{\bar{L}}{m} \right)^{1-\beta} = \frac{B}{m} \bar{L}^{1-\beta} K,$$

e quindi a livello aggregato

$$Y = A_L K, \quad (20)$$

dove  $Y = mY_i$  e  $A_L = B \bar{L}^{1-\beta}$ .

L'equazione (20) mette in evidenza che anche l'ipotesi del "*learning by doing*" fornisce una funzione di produzione in ultima istanza analoga a quella prospettata dal semplice modello AK. Quindi, il modello di sviluppo endogeno legato alla presente ipotesi è analogo a quello visto nel paragrafo 1.

Si noti, infine, che i sistemi economici nei quali l'effetto di esternalità legato all'apprendimento tramite l'esperienza è più forte (quindi  $1 - \beta$  è più alto) si sviluppano a ritmo più rapido perchè in essi si remunera meglio il capitale fisico.

## Riferimenti bibliografici

Aghion, P.-Howitt P. (1997), *Endogenous Growth Theory*, The MIT Press, Cambridge (MA).

Barro, R.J. (1990), "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, 98, S103-S125.

Barro, R.J.-Sala i Martin, X. (2004), *Economic Growth*, The MIT Press, Cambridge (MA).

Boggio, L.-Seravalli, G. (2003), *Sviluppo e crescita economica*, Il Mulino, Bologna.

Daveri, F. (1997), *Economia dei paesi in via di sviluppo*, Il Mulino, Bologna.

Jones, C.I. (1998), *Introduction to Economic Growth*, W.W. Norton, New York.

Lucas, R.E. (1988), "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, 22, 3-42.

Rebelo, S. (1991), "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, 99, 500-521.

Romer, P.M. (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, 94, 1002-1037.