$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}\subseteq\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$
$\subseteq\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}$

SIANO $m,n\in\mathbb{Z}$ $n\neq 0$ $k\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$

$\frac{m}{n}+\frac{k}{q}=\frac{m\cdot q+n\cdot k}{n\cdot q}$ SOMMA

$\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{q}=\frac{m\cdot k}{n\cdot q}$ PRODOTTO

$\left(\frac{m}{n}\right)^k=\frac{m}{n}\cdots\frac{m}{n}=\frac{m^k}{n^k}$ $k>0$

$\left(\frac{m}{n}\right)^{-k}=\frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^k}=\frac{n^k}{m^k}$ $k>0$

$\left(\frac{m}{n}\right)^{k+r}=\left(\frac{m}{n}\right)^k\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^r$ $r>0, k>0$ $r\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$

SIA $q\in\mathbb{Q}$, $q\neq 0$

$q^0=q^{n-n}=$
$=q^n\cdot q^{-n}$
$=q^n\cdot\frac{1}{q^n}=1$

- $\frac{9}{11}=0{,}818181\dots=0{,}\overline{81}$ — φ PERIODO DI LUNGHEZZA 2
- $\frac{173}{2}=86{,}5$

TEOREMA: SIA $q\in\mathbb{Q}$. SI HA CHE LA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DI q O È FINITA O, SE È INFINITA, È PERIODICA CON PERIODO DI LUNGHEZZA FINITA.

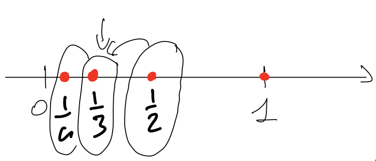
$\sqrt{2}=1{,}14|\dots\dots\dots$

DEFINIZIONE: SIA $E\subseteq\mathbb{Q}$, $E\neq\emptyset$
SI DICE CHE $q\in\mathbb{Q}$ È UN MASSIMO PER E SE (UN MINIMO)
1) $q\in E$
2) $\forall x\in E$ SI HA CHE $x\leq q$ ($\geq$)

$E=\left\{\frac{2}{5}\right\}$

$E=\{q\in\mathbb{Q}\mid q\geq 0\}$
$\min(E)=0$
$\max(E)\ \nexists$

$E=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}, n\neq 0\right\}$
$=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots\right\}$
$\max(E)=1$
$\min(E)=\nexists$



TEO: SIA $E\subseteq\mathbb{Q}$, $E\neq\emptyset$.
SE E AMMETTE UN ELEMENTO MASSIMO ALLORA TALE MASSIMO È UNICO (E SIMILMENTE PER IL MINIMO)

DIM: SUPPONIAMO CHE ESISTANO DUE MASSIMI M_1 E M_2

1) SICCOME M_1 È UN MASSIMO ALLORA $M_1\in E$ MA PURE M_2 È MASSIMO E QUINDI $M_1\leq M_2$
2) SICCOME M_2 È UN MASSIMO ALLORA $M_2\in E$ MA PURE M_1 È UN MASSIMO QUINDI $M_2\leq M_1$

$M_1=M_2$

$\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$

1) $+\infty + \infty = +\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$

2) $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty \qquad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

$(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

3) SE $q \in \mathbb{Q}$ $q \neq +\infty$ E $q \neq -\infty$

$$\frac{q}{+\infty} = \frac{q}{-\infty} = 0$$

SE $q > 0$ $\quad q\cdot(+\infty) = +\infty$

$\qquad\qquad q\cdot(-\infty) = -\infty$

NON É POSSIBILE DEFINIRE

$$\cancel{+\infty - \infty} \qquad \cancel{-\infty + \infty} \qquad \cancel{\frac{\infty}{\infty}}$$

DEF: SIA $E \subseteq \mathbb{Q}$, $E \neq 0$.

SI DICE CHE $q \in \mathbb{Q}$ É UN MAGGIORANTE PER E SE $\forall x \in E$ SI HA CHE $x \leq q$

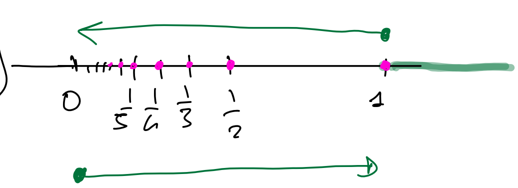
SI DICE CHE $q \in \mathbb{Q}$ É UN MINORANTE PER E SE $\forall x \in E$ SI HA CHE $x \geq q$

DEF: DATO $E \subseteq \mathbb{Q}$, $E \neq \emptyset$, SI DEFINISCE

$$U_E \doteq \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \text{ É UN MAGGIORANTE PER } E \}$$

$$L_E \doteq \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \text{ É UN MINORANTE PER } E \}$$

$$E = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}$$



• $U_E = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1 \}$

- $L_E = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$

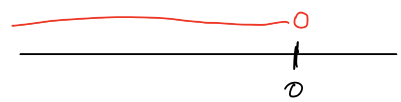
$\exists \ \min(U_E) \qquad \exists \ \max(L_E)$

$\sup(E) \doteq \min(U_E)$

$\inf(E) \doteq \max(L_E)$

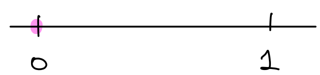
<u>DEF</u>: SIA $E \subseteq \mathbb{Q}$.

SE $E = \emptyset$ ALLORA $\inf(E) \doteq +\infty$, $\sup(E) \doteq -\infty$



SE $E \neq \emptyset$ ALLORA

$\sup(E) \doteq \min(U_E)$



$\inf(E) \doteq \max(L_E)$

SE $L_E = \emptyset \Rightarrow \inf(E) = -\infty$

SE $U_E = \emptyset \Rightarrow \sup(E) = +\infty$

	max	min	sup	inf	
$\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$	$\nexists$	0	1	0	
$\{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$	$\nexists$	$\nexists$	0	$-\infty$	$\Rightarrow L_E = \emptyset$
$\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$	$\nexists$	$\nexists$	$+\infty$	0	$U_E = \emptyset$
$\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q < 1\}$	$\nexists$	0	1	0	
$\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q \leq 1\}$	1	$\nexists$	1	0	

<u>TEO</u>: SE $E \subseteq \mathbb{Q}$, $E \neq \emptyset$, ALLORA $\sup(E)$ E $\inf(E)$ ESISTONO SEMPRE (ANCHE SE

NON É GARANTITO CHE SIANO FINITI) MA
NON É DETTO CHE SUP E INF ESISTANO
IN $\mathbb{Q}$

ESEMPIO: $E \doteq \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2 \}$ ←

[$\sup(E) \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sup(E) = q_0$ É TALE CHE $q_0^2 = 2$