

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$$

$\nexists \sup(A)$ in \mathbb{Q} o meglio il $\sup(A)$ esiste ma non è un numero razionale. In particolare si ha che

$$(\sup(A))^2 = 2 \quad x^2 = 2$$

Def: esiste un insieme chiamato insieme dei numeri reali ed indicato con il simbolo \mathbb{R} tale che

$$1) \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

2) sia $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che $E \neq \emptyset$
allora $\exists \sup(E)$ in \mathbb{R}
ed $\exists \inf(E)$ in \mathbb{R}

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$$

IRRAZIONALI

NUMERI LA CUI RAPPRESENTAZIONE DECIMALE È INFINITA E NON PERIODICA

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$= 1,41421356237 \dots$$

$$\pi$$

$$e = 2,718281828459 \dots$$

Def: siano $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



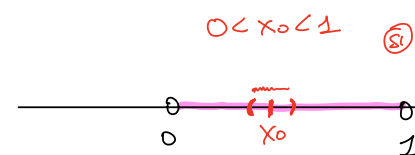
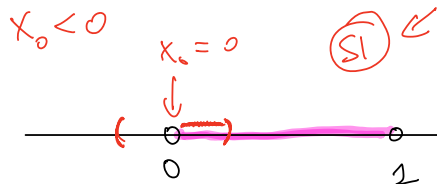
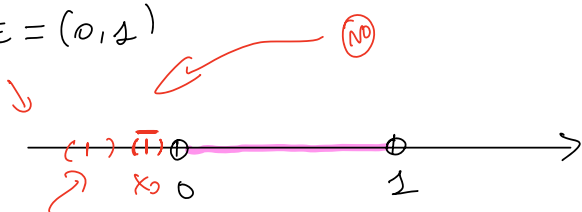
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$



$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$



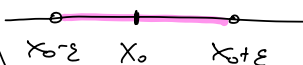
$$E = (0, 1)$$



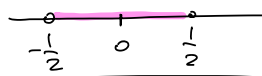
Def: sia $x_0 \in \mathbb{R}$

e sia $\varepsilon > 0$

$$I_{x_0}(\varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$



$$I_0(+\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$



$$I_1(1) = (0, 2)$$

Def: sia $E \subseteq \mathbb{R}$ $E \neq \emptyset$

sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

si dice che x_0 è un punto limite di

E se qualsiasi intorno di x_0 contiene

almeno un punto di E diverso da x_0 .

Def: sia $E \subseteq \mathbb{R}$ $E \neq \emptyset$

sia $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 è un punto limite di E se

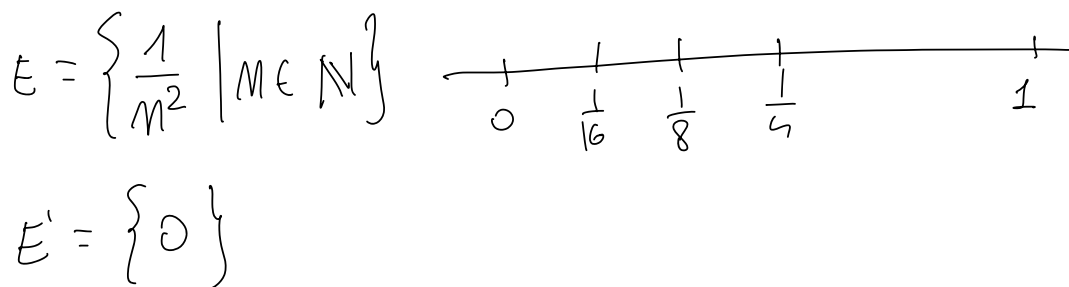
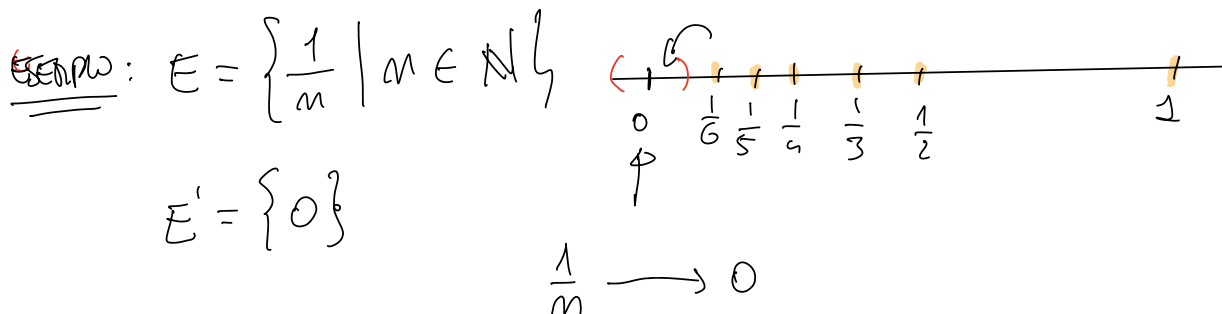
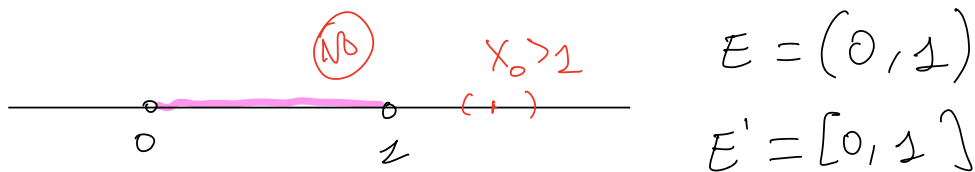
$$\forall \varepsilon > 0, I_{x_0}(\varepsilon) \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

L'insieme dei punti limite di un dato insieme E si indica con E' e si chiama l'insieme derivato di E

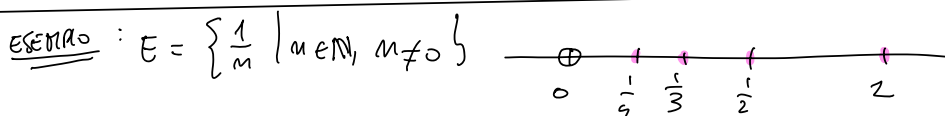
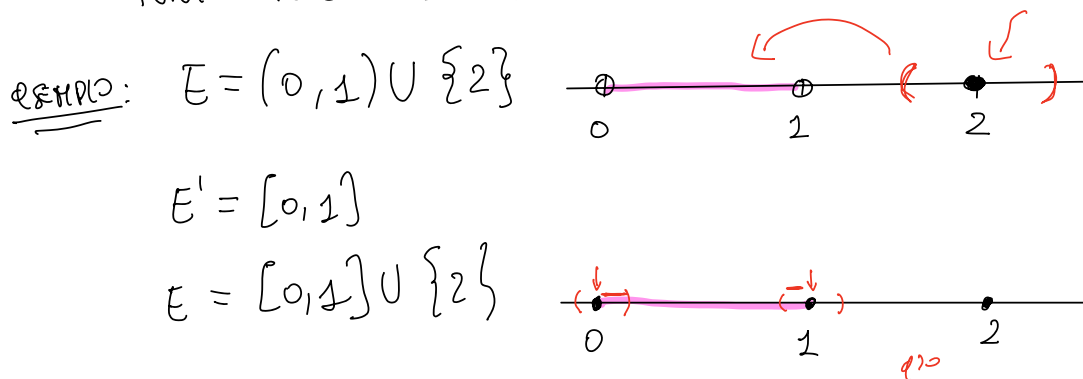
(SI)

$$x_0 = 1$$





DEF: SIA $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. UN QUALSIASI PUNTO x_0 DI E CHE NON SIA UN PUNTO LIMITE SI CHIAMA PUNTO ISOLATO DI E .



TUTTI I PUNTI DI E SONO PUNTI ISOLATI DI E
 L'UNICO PUNTO LIMITE È $x_0 = 0$

DEF. SIA $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. SI DICE CHE $x_0 \in E$ È UN PUNTO INTERNO SE ESISTE UN INTORNO DI x_0 CHE SIA TOTALMENTE CONTENUTO IN E . OVVERO

$$\exists \varepsilon > 0 : I_{x_0}(\varepsilon) \subset E$$

$$E = \{1\} \quad E = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$E = (0, 1) \quad \text{---} \quad \text{diagramma: segmento aperto da 0 a 1 con frecce all'esterno}$$

UN QUALSIASI PUNTO $0 < x_0 < 1$ È UN PUNTO INTERNO

$$E = [0, 1] \quad \text{---} \quad \text{diagramma: segmento chiuso da 0 a 1 con punti solidi e frecce all'interno}$$

UN QUALSIASI PUNTO $0 < x_0 < 1$ È UN PUNTO INTERNO

ESEMPIO: $\bullet A = (0, 1)$ APERTO MA NON CHIUSO

$\bullet \bullet A = [0, 1)$ NON APERTO NON CHIUSO

$\bullet \bullet \bullet A = (0, 1]$ NON APERTO NON CHIUSO

$\bullet \bullet \bullet \bullet A = [0, 1]$ NON APERTO CHIUSO

DEF: SIA $A \subseteq \mathbb{R}$
 $A \neq \emptyset$ SE
 CON PUNTO DI
 A È UN PUNTO
 INTERNO ALLOR
 A SI DICE
 INSIEME APERTO

DEF: SIA $A \subseteq \mathbb{R}$
 $A \neq \emptyset$. A SI DICE
 CHIUSO SE
 $A' \subseteq A$

OVVERO SE CON
 PUNTO LIMITE DI
 A È UN PUNTO
 DI A

DEF: DATO UN INSIEME A SI CHAMA CHIUSURA DI A
 E SI INDICA CON \bar{A} L'INSIEME $\bar{A} = A \cup A'$
 OVVERO L'INSIEME CHE OTTENGO AGGIUNGENDO AD A TUTTI
 I SUOI PUNTI LIMITI.

$$\overline{(0, 1)} = [0, 1]$$

$$\overline{[0, 1]} = [0, 1]$$

$$\overline{[0, 1]} = [0, 1]$$

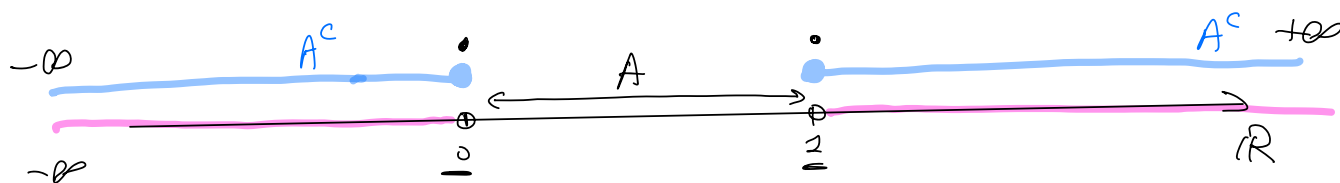
DEF: SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. SI DICE CHE $x_0 \in A$ È UN PUNTO
 ESTERNO AD A SE \exists UN INTORNO DI x_0 TOTALMENTE

CONTENUTO NEL COMPLEMENTARE DI A OUVRO

$$\exists \varepsilon > 0 : I_{x_0}(\varepsilon) \subset A^c = \mathbb{R} \setminus A$$

ESEMPLO: $A = (0, 1)$ $A^c = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

ESTERNO DI A $\rightarrow \overset{\circ}{A}^c = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



$A = [0, 1]$ I PUNTI ESTERNO SONO $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

DEF: SIA $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$ SI DICE UN PUNTO DI BORDO SE

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ SI HA CHE } A \cap I_{x_0}(\varepsilon) \neq \emptyset$$

$$A^c \cap I_{x_0}(\varepsilon) \neq \emptyset$$

$A = (0, 1)$ CHI SONO I PUNTI DI BORDO? $\{0, 1\}$



| INSIEMI | LIMITE | ISOLATI | INTERNI | ESTERNI | RE | APERTO o CHIUSO |
|--|-------------|--|-------------|---|--|------------------------|
| $(0,1)$ | $[0,1]$ | \emptyset | $(0,1)$ | $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ | $\{0,1\}$ | APERTO |
| $\{0,1\}$ | \emptyset | $\{0,1\}$ | \emptyset | $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ | $\{0,1\}$ | CHIUSO |
| $\{\frac{1}{n} n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ | $\{0\}$ | $\{\frac{1}{n} n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ | \emptyset | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ | $\{\frac{1}{n} n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ | NE APERTO SÌ CHIUSO |