DEF: FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

UNA FUNZIONE REALE A VARIABILE REALE È UNA CORRISPONDENZA CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO DI UN SOTTOINSIEME

$$D \subseteq \mathbb{R}$$

UNO ED UNO SOLO ELEMENTO DELLA RETTA REALE

$f, g, h, \dots$

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \in D \longrightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{IMMAGINE DI } x \text{ TRAMITE } f} \in \mathbb{R}$$

DOMINIO DELLA FUNZIONE f.

$$f : \underset{\text{DOMINIO}}{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \underset{\text{CO-DOMINIO}}{C} \subseteq \mathbb{R}$$

ESEMPIO: 1) $f(x) = x$ $\qquad x \in \mathbb{R} \longrightarrow x \in \mathbb{R}$ FUNZIONE IDENTITÀ

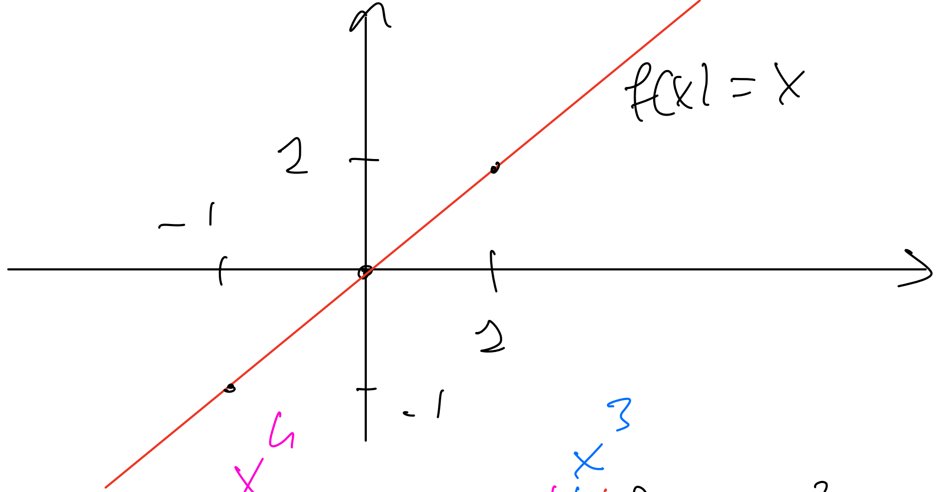
2) $f(x) = x^2$ $\qquad x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}$

DEF: DATA UNA FUNZIONE $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ SI CHIAMA GRAFICO DELLA FUNZIONE IL SOTTOINSIEME $G_f \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

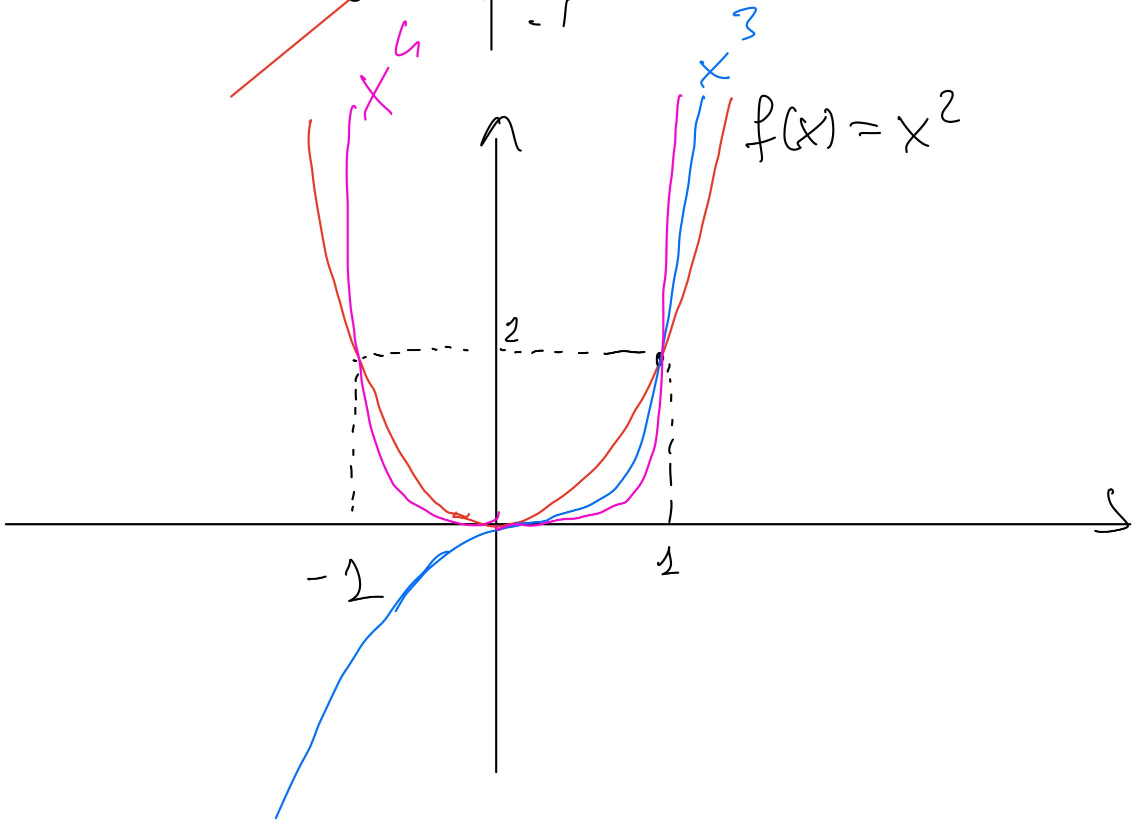
DEFINITO COME:

$$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in D \} \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

x	$f(x) = x$
-1	-1
0	0
1	1



x	$f(x) = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



DEF: UNA FUNZIONE SI DICE PARI SE

$$f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D$$

SI DICE DISPARI SE

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in D$$

$$f(x) = x^2 = (-x)^2 \qquad \text{PARI}$$

$$f(x) = x^3 = -(-x)^3 \qquad \text{DISPARI}$$

$f(x) = x^2 + x^3$ NÉ PARI NÉ DISPARI

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ PARI

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$

$f(-x) = \dfrac{1}{1-x^3} \neq f(-x) = \dfrac{1}{-1-x^3}$

TROVARE IL DOMINIO DI:

$f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad D = \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

DEF: SIA $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SIA $I \subseteq D$.

SI DICE CHE f È STRETTAMENTE CRESCENTE IN I SE

$\forall\, x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

CRESCENTE IN I SE

$$\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

STRETTAMENTE DECRESCENTE IN I SE

$$\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

DECRESCENTE IN I

$$\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

ESEMPIO: $f(x) = x^2 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_1 + x_2)(x_2 - x_1)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

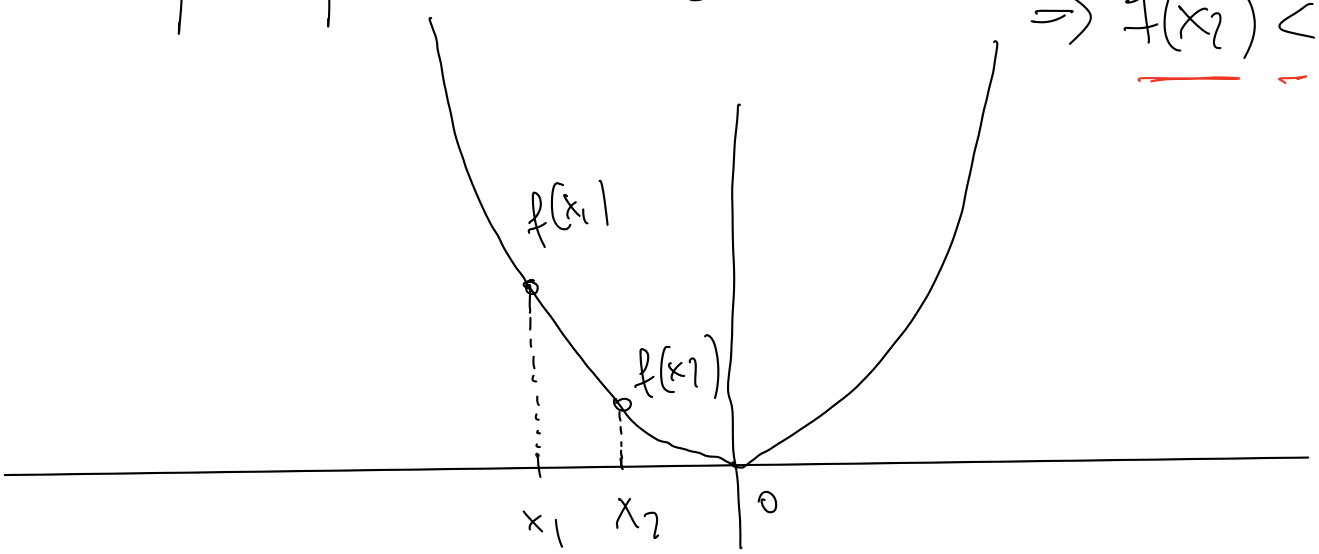
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_1 + x_2)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_1 + x_2)(x_2 - x_1) = x_2^2 - x_1^2$$

SE $x_1 < x_2 \le 0 \Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$

$x_2 - x_1 > 0$

$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$



DEF: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SI DICE CHE f È

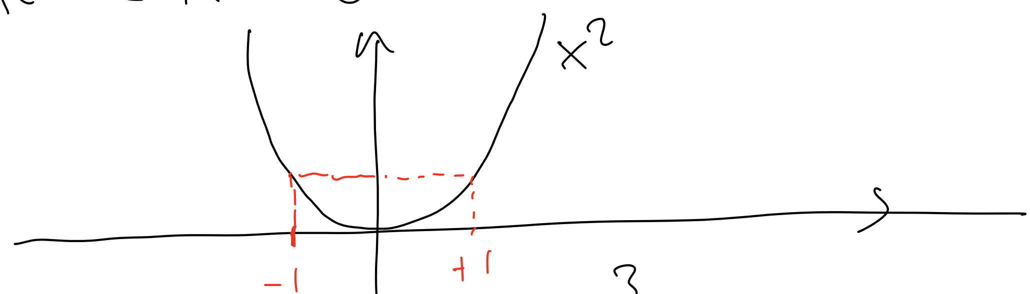
INIETTIVA

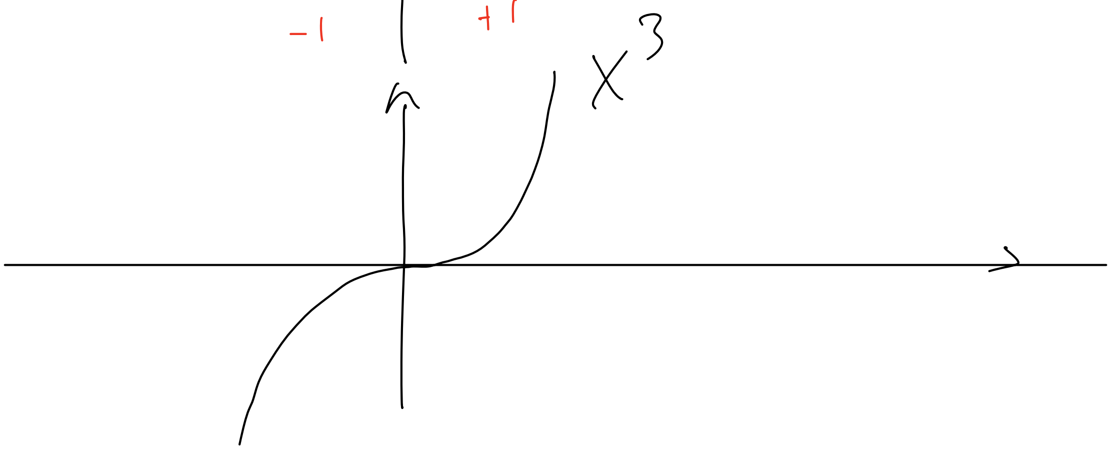
SE $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

SE $\forall x_1, x_2 \in D : f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$

ESEMPIO: $f(x) = x^2 \quad f(-2) = f(2) = 4$

$f(x) = x^3$ È INIETTIVA.





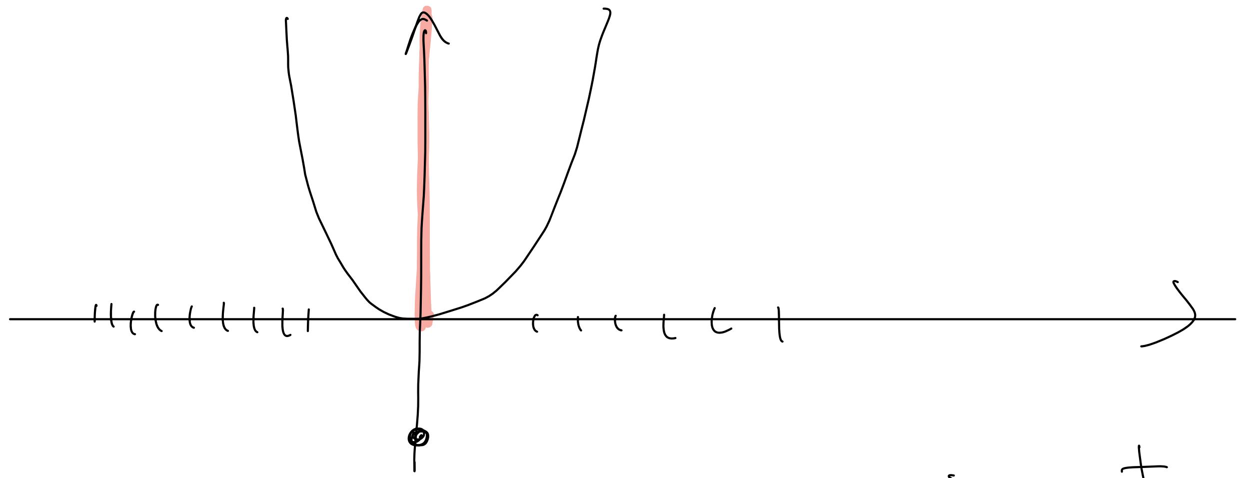
DEF: DATA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}$ SI DICE

CHE f È

SURGETTIVA

SE $\forall y \in C \ \exists x \in D : f(x) = y$

ESEMPIO: $f(x)=x^2$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



$f(x)=x^2$: $\quad f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)=\mathbb{R}^+$

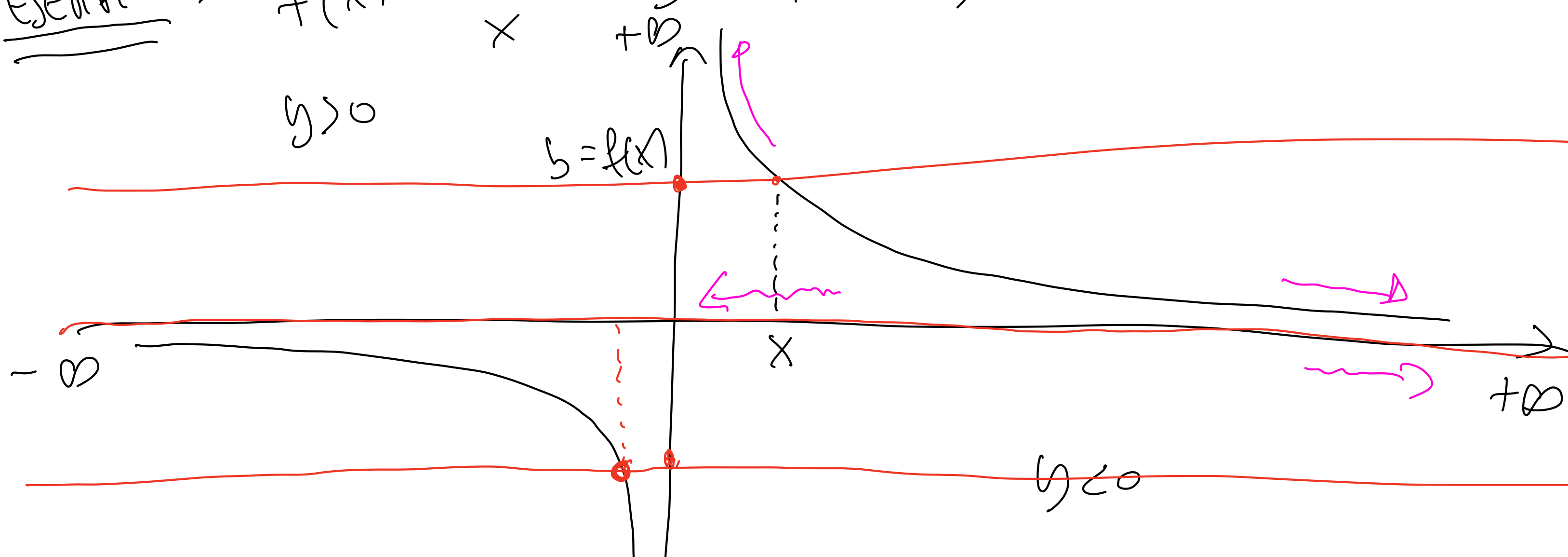
SURGETTIVA

DEF: SIA $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ SI CHIAMA

IMMAGINE DELLA FUNZIONE

$$I_f=\{y\in\mathbb{R} \mid \exists\, x\in D : y=f(x)\}$$

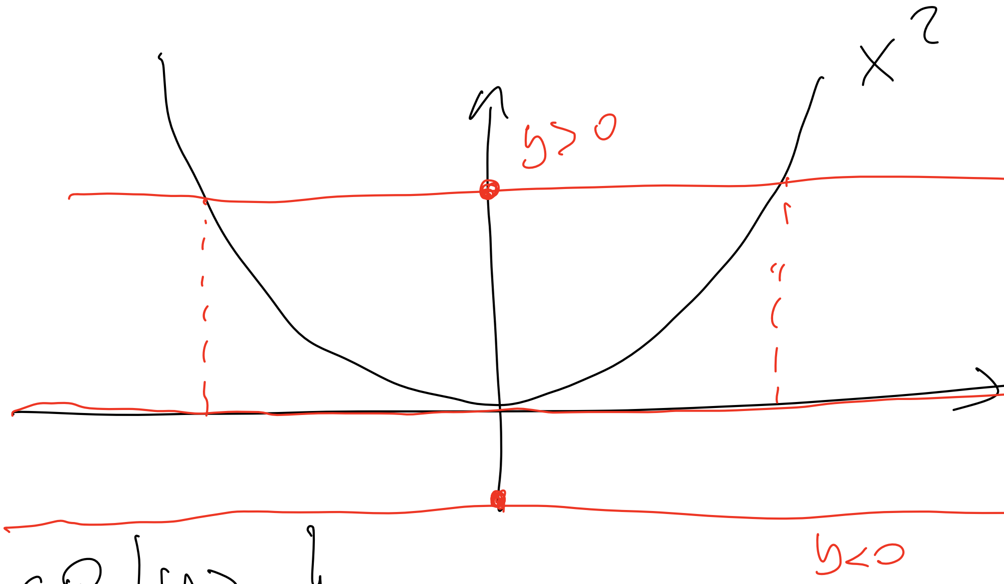
ESEMPIO: $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$-\infty$

$I_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ESEMPIO: $f(x) = x^2$

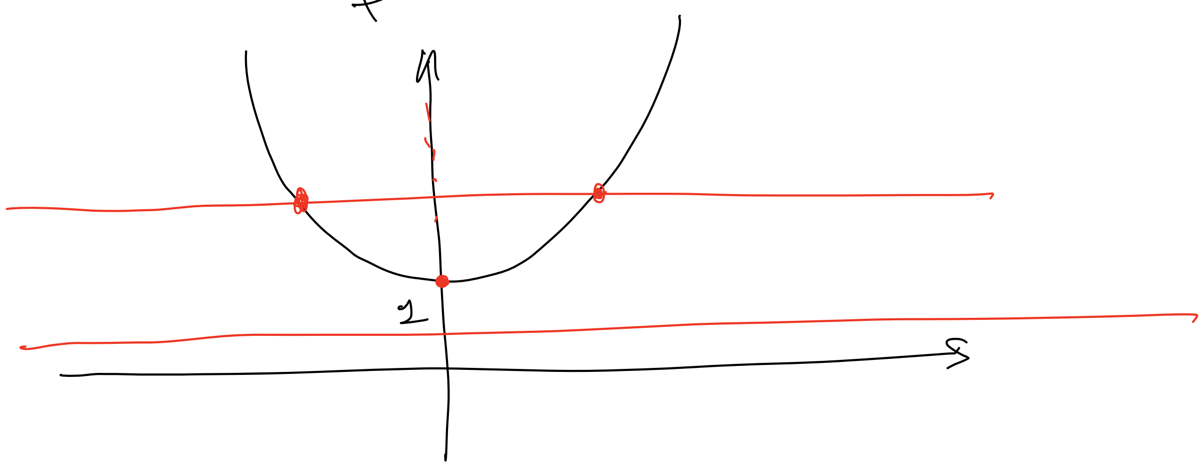


$I_f = [0, +\infty) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

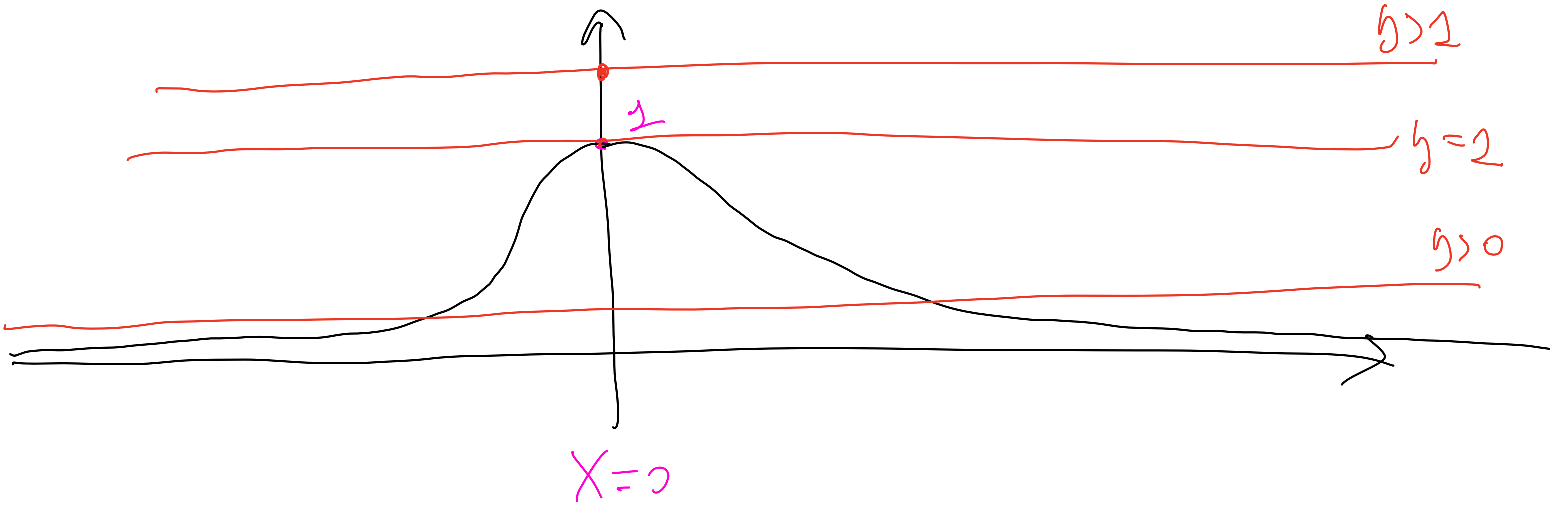
$f : D \subseteq \mathbb{R} \to I_f \subseteq \mathbb{R}$ SURGETTIVA

ESEMPIO: $f(x) = 1 + x^2$

$I_f = \ ? \ = [1, +\infty) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$



ESEMPIO: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad I_f = (0, 1]$



$f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ NO SURGETTIVA

$f: \mathbb{R} \longrightarrow (0,1] \subseteq \mathbb{R}$ SURGETTIVA

ESEMPIO: $f(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$

1) INIETTIVA? NO $\quad f(1) = 1 = f(-1)$

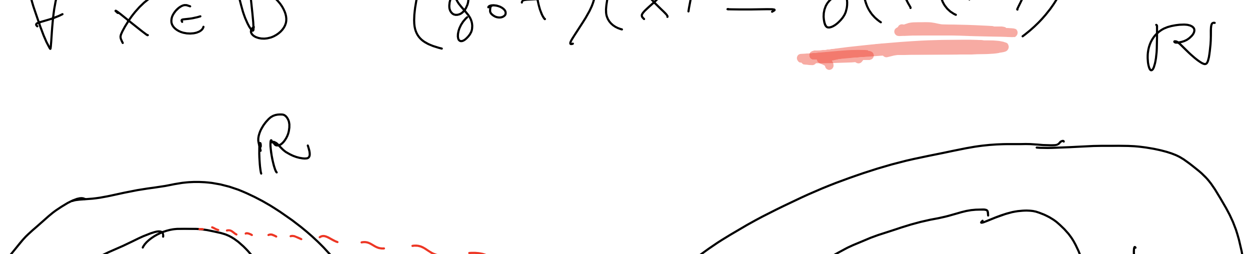
2) $I_f = ?$ $\quad I_f = (0, +\infty)$

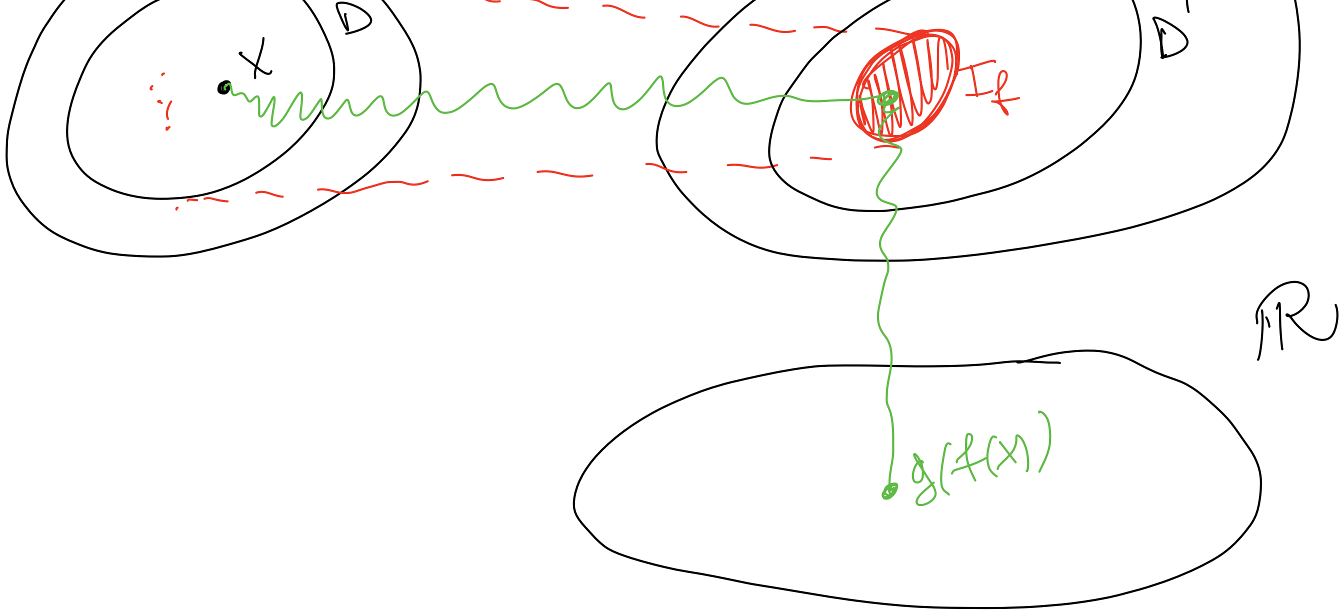
DEF: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: D' \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TALE CHE $I_f \subseteq D'$

È BEN DEFINITA LA FUNZIONE COMPOSTA $g \circ f$ NEL SEGUENTE MODO:

$$\forall x \in D \quad (g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$$





$$f(x) = x+1 \qquad g(x) = x^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

$$x \xrightarrow{\ f\ } x+1 \xrightarrow{\ g\ } (x+1)^2$$

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2} = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = 1+x \qquad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2}$$

$$(f \circ g)(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$$

DEF: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SI DICE CHE f È INVERTIBILE SE ESISTE g FUNZIONE TALE CHE

$$(f \circ g) = (g \circ f) = i$$

DOVE i È LA FUNZIONE IDENTITÀ $i(x) = x \quad \forall x$

TALE g SI CHIAMA FUNZIONE INVERSA E SI DENOTA CON $g = f^{(-1)}$

$f(x) = x + 1 \qquad g(x) = x - 1 \qquad g = f^{(-1)}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = x+1-1 = x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = x-1+1 = x$$

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \underline{g(x) = \frac{1}{x}} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

$$(g \circ f)(x) = \underline{g(f(x))} = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$