$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{100}, \dots\} = \{x_n\}$

INDICO TUTTI GLI ELEMENTI DELLA SUCCESSIONE

PROBLEMA: SIA $\{x_n\}$ UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI

$$x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

SIA: $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SUPPONIAMO CHE $x_n \in D \ \forall n$

POSSO CONSIDERARE UNA NUOVA SUCCESSIONE

$$x'_n = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

LA DEFINIZIONE È BEN POSTA DATO CHE x_n APPARTIENE AL DOMINIO DI f PER OGNI n.

SE $x_n \to x_0$ $\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0\right)$ COSA SUCCEDE A

$x'_n = f(x_n)$?

DEF. UNA FUNZIONE $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE

CONTINUA IN x_0

SE PER OGNI SUCCESSIONE $\{x_n\}$ TALE CHE

$x_n \to x_0$ SI HA CHE $f(x_n) \to f(x_0)$

TEO: LE SEGUENTI FUNZIONI

1) $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

2) $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

3) $x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

4) $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$0 < a < 1$
$a > 1$

5) $\log_a(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

SONO FUNZIONI CONTINUE OVVERO ESSE SONO CONTINUE IN TUTTI I PUNTI DEL LORO DOMINIO

6) $x^{1/n} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

ESEMPIO: $x_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

LA FUNZIONE COSENO É CONTINUA QUINDI

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to \cos(0) = 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to \sin(0) = 0$$

$$a^{1/n} \longrightarrow a^0 = 1$$

$$2 \longrightarrow 2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^4 \longrightarrow 0$$

$$\log_2\left(\frac{1}{n}\right) = \log_2\left(n^{-1}\right) = -\log_2(n)$$

È FACILE VEDERE CHE $\log_2(n) \longrightarrow +\infty$

E QUINDI $\log_2\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow -\infty$.

TEO: SIANO $\{x_n\}$ E $\{y_n\}$ SUCCESSIONI.

SE $x_n \longrightarrow l_1$ E $y_n \longrightarrow l_2$ ALLORA

1) $x_n + y_n \longrightarrow l_1 + l_2$

2) $x_n y_n \longrightarrow l_1 \cdot l_2$

SE $x_n \longrightarrow +\infty$ E $y_n \longrightarrow +\infty$ ALLORA

3) $x_n + y_n \longrightarrow +\infty$

4) $x_n \cdot y_n \longrightarrow +\infty$

SE $x_n \longrightarrow -\infty$ E $y_n \longrightarrow -\infty$ ALLORA

5) $x_n + y_n \longrightarrow -\infty$

6) $x_n \cdot y_n \longrightarrow +\infty$

SE $x_n \longrightarrow +\infty$ E $y_n \longrightarrow -\infty$ NON POSSO DIRE

CON CERTEZZA $x_n + y_n \longrightarrow$??

ESEMPIO: $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7 - 30n^4 + \sqrt{2}\,n}{7 - 2n^7 + n^3} =$$

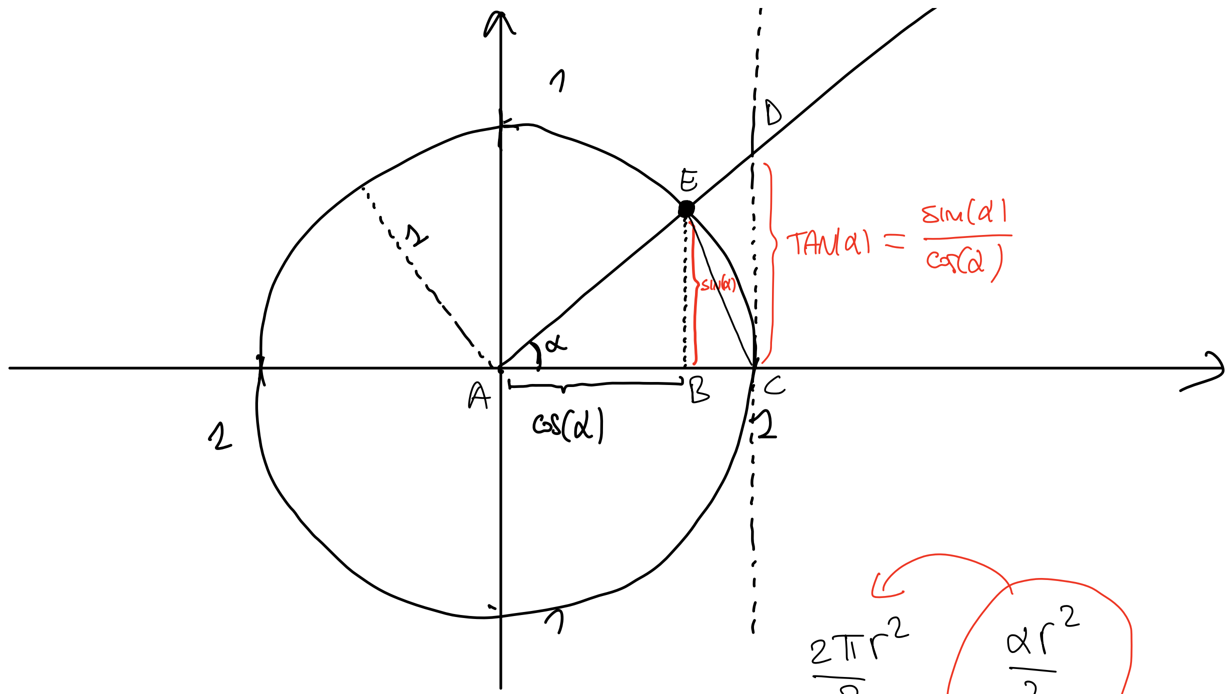
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^7}\left[1 - \frac{30}{n^3} + \sqrt{2}\frac{1}{n^6}\right]}{\cancel{n^7}\left[\frac{7}{n^7} - 2 + \frac{1}{n^4}\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \overbrace{\frac{30}{n^3}}^{0} + \overbrace{\frac{\sqrt{2}}{n^6}}^{0}}{-2 + \underbrace{\frac{7}{n^7}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{n^4}}_{0}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ESEMPIO: $$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{n}^{+\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{0} = 0 \times (+\infty)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{n^3}^{+\infty} \cdot \underbrace{\frac{7}{n^3}}_{0} = 7 = 0 \times (+\infty)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{n^4}^{+\infty} \underbrace{\frac{7}{n^3}}_{0} = \lim_{n\to+\infty} 7 \cdot n = +\infty = 0 \times (+\infty)$$



$$\frac{2\pi r^2}{2} \qquad \frac{\alpha r^2}{2}$$

$$\underset{\substack{\| \\ \frac{\sin(\alpha)}{2}}}{\triangle ACE} \le \underset{\substack{\| \\ \frac{\alpha}{2}}}{\overset{\frown}{ACE}} \le \underset{\substack{\| \\ \frac{\sin(\alpha)}{2\cos(\alpha)}}}{\triangle ACD}$$

$$0 \le \frac{\sin(\alpha)}{\cancel{2}} \le \frac{\alpha}{\cancel{2}} \le \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$ ⇒ DIVIDO TUTTO PER $\sin(\alpha)$

$$0 \le \sin(\alpha) \le \alpha \le \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$1 \le \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} \le \frac{1}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \cos(\alpha) \le \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \le 1$$

$$\alpha = \frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{0 \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1}} \quad \forall n$$

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

TEO: SIANO $\{x_n\}, \{y_n\}$ E $\{z_n\}$ TRE SUCCESSIONI TALI CHE

$$y_n \leq x_n \leq z_n \quad \forall n$$

ALLORA:

1) SE $y_n \to +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty$

2) SE $z_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$

3) SE $y_n \to L$ E $z_n \to L \Rightarrow x_n \to L$

ESEMPIO: SIA $P > 0$.

$$x_n = P^{1/n}$$

$\boxed{\text{SIA } P > 1}$. SIA $y_n = P^{1/n} - 1 \geq 0$

$$1 + y_n = P^{1/n} \Rightarrow P = (1 + y_n)^n$$

DISEGUAGLIANZA BINOMIALE $P = (1+y_n)^n \geq 1 + n y_n$

$$P - 1 \geq n y_n$$

$$\frac{P-1}{n} \geq y_n \geq 0$$

$$0 \leq y_n \leq \frac{P-1}{n} \to 0$$

≥ 0

QUINDI SI HA CHE $y_n \to 0$

$$P^{1/n} - 1 \to 0 \Rightarrow P^{1/n} \to 1 \quad (P > 1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{5}\right)^{1/n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} = 1$$

SE $0<p<1 \Rightarrow q = \frac{1}{p} \Rightarrow q>1$

$$p^{1/n} = \frac{1}{q^{1/n}} \quad \text{MA } q>1 \text{ QUINDI } q^{1/n} \longrightarrow 1$$

$$p^{1/n} = \frac{1}{q^{1/n}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1$$

TEO: SE $p>0$ ALLORA $p^{1/n} \longrightarrow 1$

ESEMPIO: $S_n = a^n \qquad a \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $a>1$ ALLORA $a = 1+h$ CON $h>0$

QUINDI $\qquad a^n = (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow a^n \longrightarrow +\infty$

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $-1<a<1$ OVVERO $|a|<1 \Rightarrow a^n \longrightarrow 0$

$$|a| = \frac{1}{1+h} \quad \text{CON } h>0$$

$$(1+h)^n \geq 1+nh \longrightarrow +\infty$$

$$|a|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \qquad \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad |a|^n \to 0 \quad \to \quad a^n \to 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^n = 0$$

$\boxed{\text{CASO 3}}$ $\quad a = -1 \qquad a^n = (-1)^n \quad \nexists$

$\boxed{\text{CASO 4}}$ $\quad \underline{a < -1} \Rightarrow \underline{a = -|a|} \qquad \underline{|a| > 1} \quad \nexists$

$$a^n = (-1)^n |a|^n$$

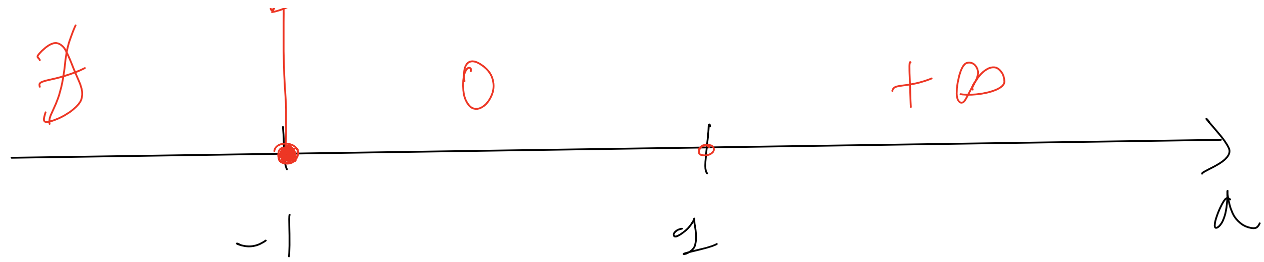
$$a^{2n} = (-1)^{2n} |a|^{2n} = |a|^{2n} \longrightarrow +\infty$$

$$a^{2n+1} = (-1)^{2n+1} |a|^{2n+1} = -|a|^{2n+1} \longrightarrow -\infty$$

RIASSUNTO:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{SE } |a| < 1 \\ +\infty & \text{SE } a > 1 \\ \nexists & \text{SE } a \leq -1 \end{cases}$$

$\nexists$



IL SIMBOLO DI SOMMATORIA

$$\sum_{k=1}^{10} 1\cdot\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{10}$$

$$\sum_{k=1}^{10} 1\cdot\frac{3}{k} = 3\cdot\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{10} 1 = 1+1+\dots+1 = 10$$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{k} = \sum_{k=1}^{10} 1 = 10$$

$$\underbrace{1+x+\dots+x^{n}} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^{k} = \sum_{q=0}^{n} x^{q} = \sum_{j=0}^{n} x^{j}$$

TRAMITE IL PRINCIPIO DI INDUZIONE ABBIAMO DIMOSTRATO CHE

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{SE } |x|<1 \\ +\infty & \text{SE } x>1 \\ \nexists & \text{SE } x\le -1 \end{cases}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$1-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\dots = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$