SUCCESSIONE DI EULERO: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1) a_n È CRESCENTE OVVERO $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$

2) a_n È LIMITATA SUPERIORMENTE $2 \le a_n \le 3$ $\forall n$

QUINDI UNENDO 1) ⊕ 2) OTTENGO CHE $\exists \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$2 \le e \le 3$.

e È UN NUMERO IRRAZIONALE QUINDI HA UN NUMERO INFINITO NON PERIODICO DI CIFRE DECIMALI

ESERCIZIO:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{7}}\right)^{\frac{n}{7}}\right]^7$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^7 = e^7$$

$\frac{n}{7} = m$

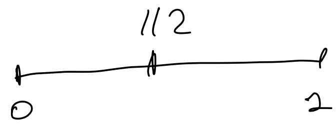
APPLICAZIONE: SIA $[0,1]$ IL NOSTRO INTERVALLO DI INVESTIMENTO. SIA R IL TASSO DI INTERESSE. (SU TUTTO IL PERIODO)

$$V_0 \longrightarrow V_0 + RV_0 = (1+R)V_0$$

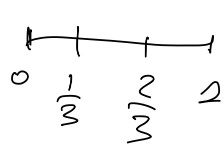
$$V_0 = 1\$ \longrightarrow 1+R$$

SE INVESTO FINO A METÀ PERIODO E POI RE-INVESTO QUELLO CHE HO MATURATO

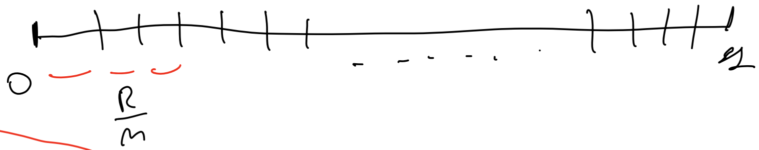
$$1 \longrightarrow \left(1+\frac{R}{2}\right) \longrightarrow \left(1+\frac{R}{2}\right)^2$$



$$1 \longrightarrow \left(1+\frac{R}{3}\right) \longrightarrow \left(1+\frac{R}{3}\right)^2 \longrightarrow \left(1+\frac{R}{3}\right)^3$$



DIVIDO L'INVESTIMENTO IN n PERIODI



$$\boxed{\left(1+\frac{R}{n}\right)^n \longrightarrow e^R}$$

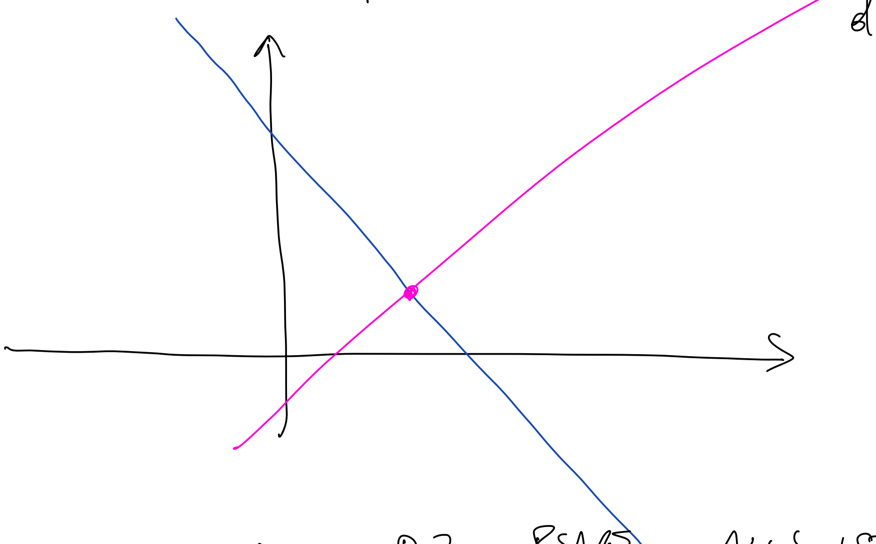
POICHÉ PARTIVO DA UN DOLLARO IL MIO RENDIMENTO

É $\boxed{e^R - 1}$ $\longrightarrow$ TASSO CONTINUAMENTE COMPOSTO

APPLICAZIONE: UN BENE É SCAMBIATO NEL MERCATO CON LA LEGGE DOMANDA – OFFERTA. SE p É IL PREZZO DI BENE ALLORA

$$D(p) = a - bp \qquad a>0,\ b>0$$

$$S(p) = cp + d \qquad c>0,\ d>0$$



SIA p_n IL PREZZO DEL BENE ALL'ISTANTE n

SI ASSUMA CHE

$$p_{n+1} = p_n + \underline{D(p_n) - S(p_n)}$$

$$P_{n+1} = P_n + a - bP_n - (cP_n + d) =$$

$$= P_n + a - bP_n - cP_n - d = (a-d) + P_n(1-b-c)$$

$$P_{n+1} = \underbrace{(a-d)}_{\alpha} + \underbrace{(1-b-c)}_{\beta}P_n = \alpha + \beta P_n$$

SUCCESSIONE DEFINITA PER RICORRENZA

$$P_{n+1} = \alpha + \beta P_n$$

P_0 = PREZZO INIZIALE

$$P_1 = \alpha + \beta P_0$$

$$P_2 = \alpha + \beta P_1 = \alpha + \beta(\alpha + \beta P_0) = \alpha + \alpha\beta + \beta^2 P_0$$

$$= \alpha(1+\beta) + \beta^2 P_0$$

$$P_3 = \alpha + \beta P_2 = \alpha + \beta(\alpha(1+\beta) + \beta^2 P_0)$$

$$= \alpha + \beta(\alpha + \alpha\beta + \beta^2 P_0)$$

$$= \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 P_0$$

$$= \alpha(1+\beta+\beta^2) + \beta^3 P_0$$

PER INDUZIONE È FACILE VERIFICARE CHE

$$P_n = \alpha\underbrace{(1+\beta+\beta^2 + \dots + \beta^{n-1})} + \beta^n P_0$$

$$= \underbrace{\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \beta^n P_0} = P_n$$

$$\alpha = a - d$$
$$\beta = 1 - b - c$$

$$\nearrow 0$$

SE $|\beta| < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\alpha \frac{1-\beta^n}{1-\beta} + \underbrace{\beta^n}_{\downarrow\, 0} p_0 \right) = \frac{\alpha}{1-\beta} \equiv p_\infty$$

$$p_\infty = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{a-d}{1-(1-b-c)} = \frac{a-d}{b+c}$$

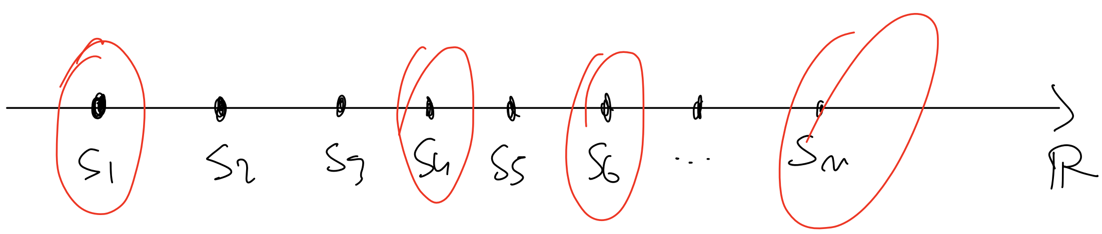
X CASA: VERIFICARE CHE $D(p_\infty) = S(p_\infty)$

SOTTOSUCCESSIONI: SIA $s_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ E SIA

$n_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ STRETTAMENTE CRESCENTE

QUINDI $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$

ALLORA s_{n_k} È DETTA UNA SOTTO-SUCCESSIONE DI s_n



ESEMPIO: $s_n = \frac{1}{n}$ $\quad s_{n^2} = \frac{1}{n^2}$

$s_n = (-1)^n \qquad s_{2n} = (-1)^{2n} = 1$

$s_n = (-1)^n \qquad s_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$

TEO: SIA s_n UNA SUCCESSIONE. ALLORA

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = L \iff \forall\, s_{n_k} \text{ SOTTO-SUCCESSIONE DI }$$

s_n SI HA CHE

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} S_{n_k} = L}$$

ESERCIZIO:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \boxed{a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n}} \end{cases}$$

SUCCESSIONE DEFINITA PER RICORRENZA.

SI DIMOSTRI CHE $\exists\ L = \lim_{n \to +\infty} a_n$ E SI DETERMINI IL VALORE DI L.

$a_0 = 1$

$a_1 = 3 - \dfrac{1}{a_0} = 3 - 1 = 2$

$a_2 = 3 - \dfrac{1}{a_1} = 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

$a_3 = 3 - \dfrac{1}{a_2} = 3 - \dfrac{1}{\frac{5}{2}} = 3 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{13}{5} = 2{,}6$

POSSO DIMOSTRARE CHE $a_n \leq 3 \ \forall n$?

USO IL PRINCIPIO DI INDUZIONE.

$a_0 = 1 \leq 3$ ok LA PROPOSIZIONE È VERA PER $n=0$

$a_1 = 2 \leq 3$ ok " " " " " $n=1$

SE $a_n \leq 3$ È VERO CHE $a_{n+1} \leq 3$?

$a_n \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \geq \dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{1}{a_n} \leq -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \leq 3 - \frac{1}{3} < 3$$

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \le 3 - \frac{1}{3} \le 3$$

QUINDI X IL PRINCIPIO DI INDUZIONE $a_n \le 3$ $\forall n$.

X CASA: USANDO IL PRINCIPIO DI INDUZIONE DIMOSTRATE CHE $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$ OVVERO CHE LA SUCCESSIONE É CRESCENTE.

1) $0 \le a_n \le 3 \quad \forall n$

2) $a_n \le a_{n+1} \quad \forall n$

$\Rightarrow \exists L = \lim_{n \to +\infty} a_n$

$$\rightarrow \boxed{a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}} \qquad \begin{array}{l} a_n \to L \\ a_{n+1} \to L \end{array}$$

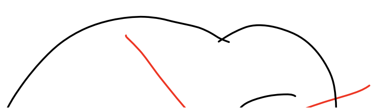
$$L = 3 - \frac{1}{L}$$

$$L^2 = 3L - 1 \Rightarrow \boxed{L^2 - 3L + 1 = 0}$$

$$L_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$L_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \Big| \quad L_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

QUALE DEI DUE É QUELLO GIUSTO?



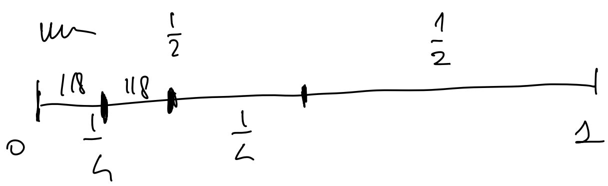
$$\cancel{L_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}38\ldots}$$

$$L_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2{,}6180\ldots$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$a_2 = 1 > L_2 \simeq 0{,}38\ldots$$

SERIE:



$$l = 1$$

$$l = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$l = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$l = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$$

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE DI NUMERI NATURALI.

SIA $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

TALE $\{S_n\}$ SI CHIAMA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI DI $\{a_n\}$.

SE ESISTE ED É FINITO IL LIMITE

$$L = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

ALLORA DICO CHE LA SERIE DEGLI $\{a_n\}$ CONVERGE

...

E SCRIVO $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = L = \sum_k a_k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \iff \underline{|x|<1}$$

SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE x

TEO: SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE. ALLORA

SE $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = L \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$

IN ALTRE PAROLE... È CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ LA SERIE CONVERGA CHE $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ OVVERO LA SUCCESSIONE DEGLI a_k DEVE ESSERE INFINITESIMA.

DIM: $$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k =$$

$$= (\cancel{a_0} + \cancel{a_1} + \dots + a_n) - (\cancel{a_0} + \cancel{a_1} + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

MA SE $S_n \to L$ ALLORA $S_{n-1} \to L$

E QUINDI $a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow L - L = 0$

ESERCIZIO: SI STABILISCA SE LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+1}$$

CONVERGE O NO.

$$\frac{k}{k+1} \longrightarrow 1 \neq 0$$ QUINDI LA CONDIZIONE NECESSARIA NON È SODDISFATTA!

E QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+1}$ NON PUÒ CONVERGERE.

ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\dots$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{2^2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$S_8 = \sum_{k=1}^{2^3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2}$$

$$S_{2^m} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} > 1 + \frac{m}{2} \longrightarrow +\infty$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty}$$

ATTENZIONE: LA CONDIZIONE $a_k \to 0$ È NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE

CRITERIO DEL RAPPORTO: SIA a_m UNA SUCCESSIONE

SI CONSIDERI $\alpha = \lim_{m \to +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|$

1) SE $\alpha > 1$ ALLORA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$

2) SE $0 \leq \alpha < 1$ ALLORA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k < +\infty$

3) SE $\alpha = 1$ NON POSSO DIRE NULLA.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \qquad a_k = \frac{1}{k!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{1} = \frac{1}{(k+1)\cdot \cancel{k!}} \cdot \cancel{k!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0 < 1$$

E QUINDI $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ CONVERGE.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$