TEO: $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

CRITERIO (O TEST) DEL RAPPORTO

$$\alpha = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

1) SE $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_k a_k = +\infty$

2) SE $0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow \sum_k a_k < \infty$

3) SE $\alpha = 1 \Rightarrow$ IL TEST È INCONCLUDENTE

CONSEGUENZA. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \infty \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(k+1)!} \frac{k!}{1} = \frac{1}{k+1} \to 0$

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = L < \infty$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE

OTTENUTA TRAMITE BINOMIO DI NEWTON

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{m}\right)}_{<1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{m}\right)}_{<1} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{m}\right)}_{<1} < \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

$$\underbrace{\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}_{=e} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow e \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

PER DIMOSTRARE L'ALTRA DISUGUAGLIANZA SI CONSIDERI UN INTERO $n \leq m$. POICHÉ I TERMINI CHE COMPAIONO NELLA SOMMATORIA $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)$ SONO TUTTI POSITIVI

ABBIAMO CHE

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\downarrow\, 1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

PRENDO ORA IL LIMITE $m\to+\infty$

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} \Rightarrow e = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

CRITERIO DI CONDENSAZIONE: SIA $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE DECRESCENTE E A TERMINI POSITIVI OVVERO

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$$

ALLORA:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ CONVERGE SE E SOLTANTO SE } \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k} \text{ CONVERGE}$$

DEF: SIA $\alpha > 0$. LA SERIE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$ È DETTA SERIE ARMONICA

$a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ È UNA SUCCESSIONE DE-CRESCENTE E A TERMINI POSITIVI QUINDI POSSO APPLICARE IL CRITERIO DI CONDENSAZIONE. PER CUI SI HA CHE

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ CONVERGE SE E SOLTANTO SE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{2^{k\cdot\alpha}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k\cdot\alpha}\, 2^{-k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k\alpha - k}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k$$

CON $x = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$ QUINDI LA SERIE CONVERGE SE E SOLTANTO SE $|x| < 1$ CIOÈ $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ CIOÈ $\underline{\underline{\alpha > 1}}$

QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ CONVERGE SE E SOLTANTO SE $\underline{\alpha > 1}$

ESERCIZIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ | $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$

$$\frac{111}{110} > 1$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{111/110}} < \infty$$

LIMITI DI FUNZIONI

HO UNA FUNZIONE $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E VOGLIO ESPRIMERE IL SEGUENTE CONCETTO:

"$f(x)$ È ARBITRARIAMENTE VICINO A UN CERTO NUMERO L POSTO CHE x SIA SUFFICIENTEMENTE VICINO AD UN CERTO x_0"

DEF SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E SIA x_0 UN PUNTO LIMITE DEL DOMINIO D.

SI DICE CHE $f(x)$ TENDE A $L \in \mathbb{R}$ QUANDO x TENDE A x_0 E SI SCRIVE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{o ANCHE} \quad f(x) \to L \text{ QUANDO } x \to x_0$$

SE E SOLTANTO SE

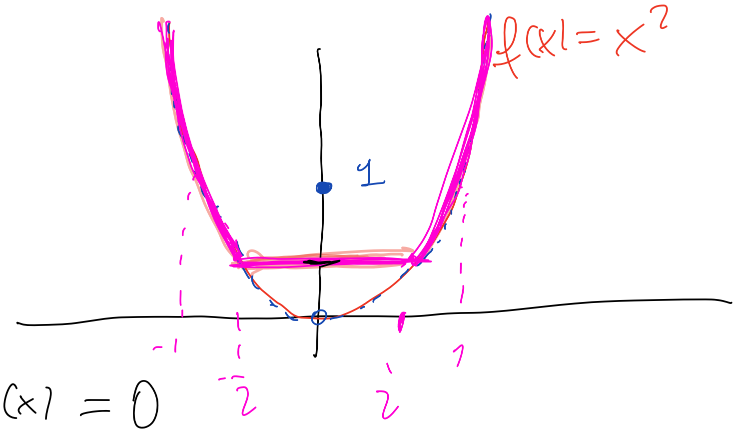
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

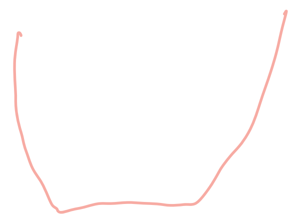
SIA: $f(x) = x^2$. $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

UNA TALE FUNZIONE $g(x)$ SI CHIAMA FUNZIONE

$\quad 1 \qquad x=0$ DEFINITA A TRATTI





$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

$$h(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{SE } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ x^2 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{4}$$

"SE E SOLTANTO SE"

TEO: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E SIA x_0 UN PUNTO LIMITE DI D

ALLORA: $(x_n \in D\ \forall n)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ TALE CHE $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0\ \forall n$

SI HA CHE $f(x_n) \to L$

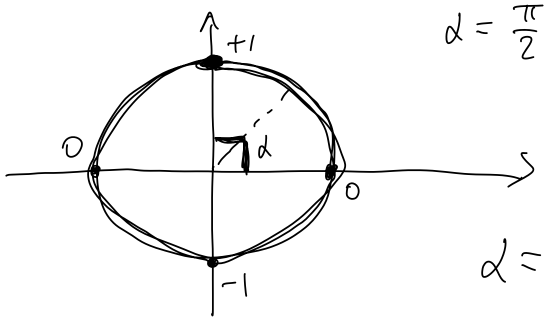
SE IO TROVO $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ TALI CHE

$x_n \to x_0$ TA $f(x_n) \to L_1$

$y_n \to x_0$ $\quad f(y_n) \to L_2$ CON $L_1 \neq L_2$ ALLORA $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$

ESEMPIO: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$

$x_0 = 0$ È UN PUNTO LIMITE DEL DOMINIO D.

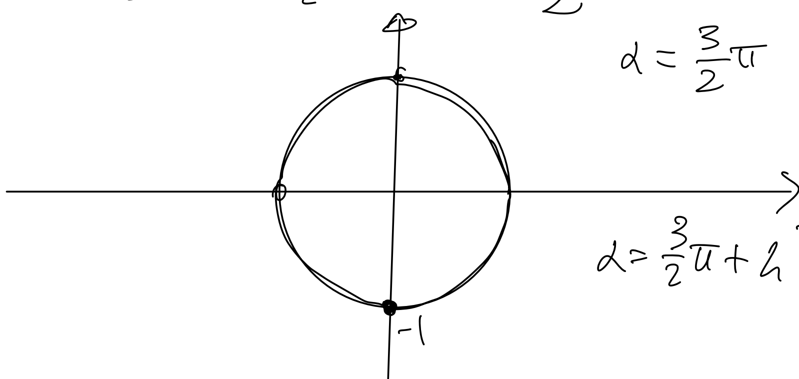


$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\alpha) = 1$

$\alpha = 5\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\alpha) = 1$

$\alpha = 9\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\alpha) = 1$

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2} + 4k\frac{\pi}{2} = (4k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\alpha_k) = 1 \quad \forall k$$



$\alpha = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \sin(\alpha) = 1$

$\alpha = \frac{3}{2}\pi + 4\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\alpha) = -1$

$$\beta_k = \frac{3}{2}\pi + 4k\frac{\pi}{2} = (4k+3)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\beta_k) = -1$$

SIA $\boxed{x_k = \frac{1}{(4k+1)\frac{\pi}{2}}} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = \sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \forall k$

$y_k = \frac{1}{(4k+3)\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{y_k}\right) = \sin\left((4k+3)\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \forall k$

HO CHE $x_k \longrightarrow 0$ MA $f(x_k) = \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = 1 \longrightarrow 1$

" " $y_k \longrightarrow 0$ MA $f(y_k) = \sin\left(\frac{1}{y_k}\right) = -1 \longrightarrow -1$

$$\nexists \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

DEF: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. DICIAMO CHE:

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \iff \forall \varepsilon>0 \; \exists \delta_\varepsilon : \forall x\in D,\ 0<x-x_0<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon>0 \; \exists \delta_\varepsilon : \forall x\in D,\ 0<x_0-x<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

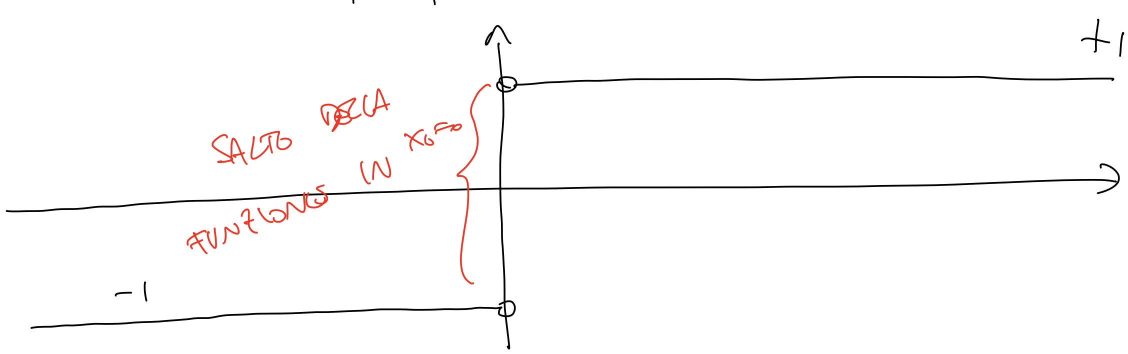
TEO: $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=L \iff \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

ESEMPIO: $f(x)=\frac{x}{|x|}$ FUNZIONE SEGNO DI x

$$D=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0\}$$

$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$ | $\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to0^-}(-1)=(-1)$

$$\nexists\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$$



$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

$$S = f(x_0^+) - f(x_0^-) = 2$$

ESEMPIO: $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

x	$f(x)$
10	$\frac{10}{11}$
100	$\frac{100}{101}$
$\vdots$	
1 000 000	$\frac{1\,000\,000}{1\,000\,001} \simeq 1$

DEF: SIA $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

DICO CHE

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon > 0 : \forall x \in D, x \geq M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon > 0 : \forall x \in D, x \leq -M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

IN QUESTO CASO SI DICE CHE LA FUNZIONE HA UN ASINTOTO ORIZZONTALE IN $y = L$

ESEMPIO: $f(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

DEF: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 SIA UN PUNTO LIMITE DI D. ALLORA

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta_M > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) > M$$

SI DICE CHE LA FUNZIONE HA UN ASINTOTO VERTICALE IN $x = x_0$