TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE SIA x_0 UN PUNTO LIMITE DI D. SI SUPPONGA CHE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$$ (L'ENUNCIATO PER $L < 0$ È LO STESSO)

ALLORA $\exists\, \delta > 0$ TALE CHE $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\}$ SI HA CHE $f(x) > 0$

$|a| < c \Rightarrow -c < a < c$

DIM: POICHÉ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

INTORNO DI x_0

- $\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 : \forall x \in D,\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

POICHÉ $L > 0$ POSSO PORRE $\varepsilon = L$

$$\exists\, \delta > 0 : \forall x \in D,\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - L| < L$$

$$-L < f(x) - L < L$$

$$-L + L < f(x) - L + L < L + L$$

$$0 < f(x) < 2L$$

CVD

ESERCIZIO: LA FUNZIONA $f(x) = e^{-1/x^2}$ È CONTINUA IN $x_0 = 0$? NO PERCHÉ IL DOMINIO DELLA FUNZIONE È $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ E QUINDI $x_0 \notin D$.

ESERCIZIO: SI CALCOLA $\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$

$$\frac{1}{x^2} \to +\infty \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \to -\infty \Rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}} \to e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ESERCIZIO: SIA DATA LA FUNZIONE

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

LA FUNZIONE g É CONTINUA IN $x_0 = 0$?

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$$

QUINDI g É CONTINUA IN $x_0 = 0$.

DEFINIZIONE: SIA $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E x_0 UN PUNTO LIMITE DI D (N.B. = x_0 PUÓ ANCHE NON APPARTENERE A D).
SI DICE CHE f HA UNA DISCONTINUITÁ RIMOVIBILE IN x_0 SE ESISTE ED É FINITO IL LIMITE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

PERCHÉ IN QUESTA SITUAZIONE LA FUNZIONE

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ L & x = x_0 \end{cases}$$

É OVVIAMENTE CONTINUA IN $x = x_0$ E COINCIDE CON f PER $x \neq x_0$. TALE g SI CHIAMA ESTENSIONE PER CONTINUITÀ DI f.

ESEMPIO: $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

QUINDI $g(x)=\begin{cases}\sin(x)/x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ È CONTINUA $\forall x\in\mathbb{R}$

DEF: SIA $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ E x_0 UN PUNTO LIMITE DI f.

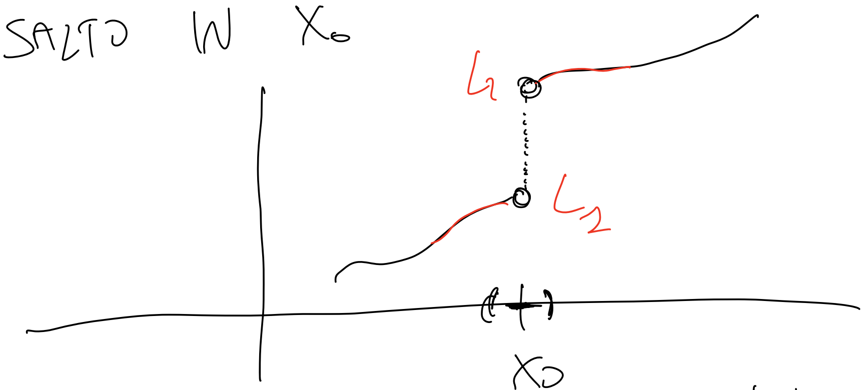
SE È VERO CHE:

1) $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$ FINITO

2) $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$ FINITO

3) $L_1 \neq L_2$

ALLORA SI DICE CHE f HA UNA DISCONTINUITÀ DI TIPO SALTO IN x_0



ESEMPIO: $f(x)=\frac{x}{|x|}=\frac{|x|}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=+1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

DEF: SIA $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE E

SIA x_0 UN PUNTO LIMITE DI D. ALLORA

SE 1) $\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ O $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

OPPURE SE

2) $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ O $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$

SI DICE CHE LA FUNZIONE HA UNA DISCONTINUITÀ ESSENZIALE IN x_0

ESEMPIO: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\nexists \lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\quad$ $\nexists \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ESERCIZIO: SIA $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$

SI STABILISCA IL TIPO DI DISCONTINUITÀ DI f IN $x_0 = 1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$

ESSENZIALE.

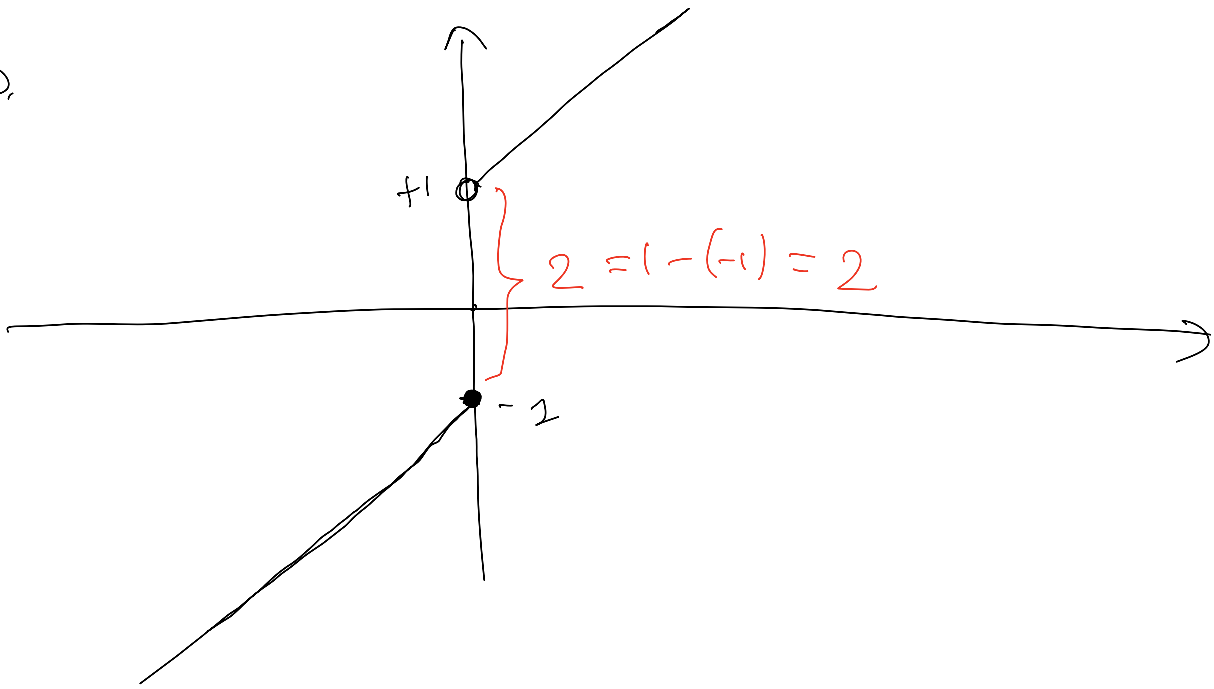
ESERCIZIO:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

$$f(0) = -1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1$$

SALTO



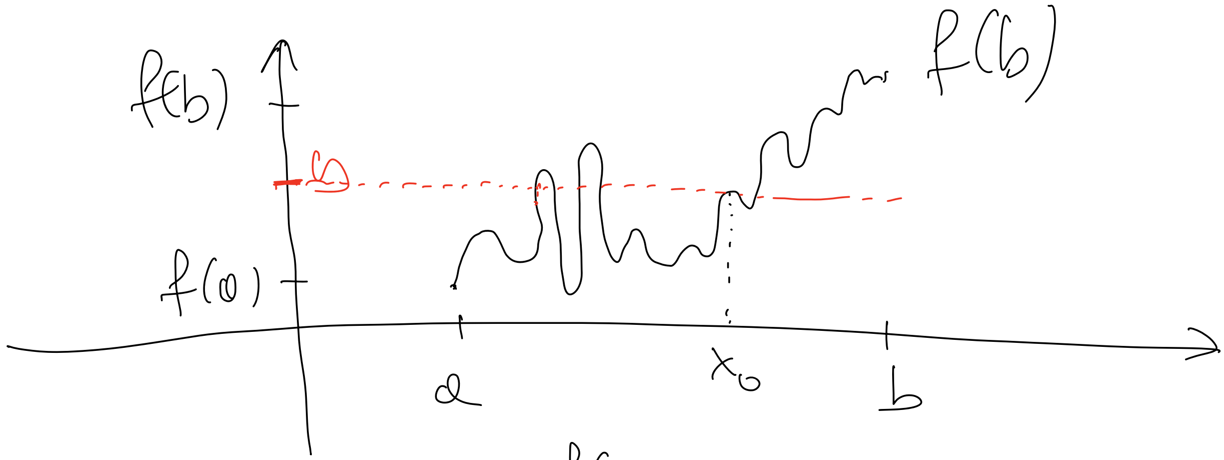
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

SIA $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$

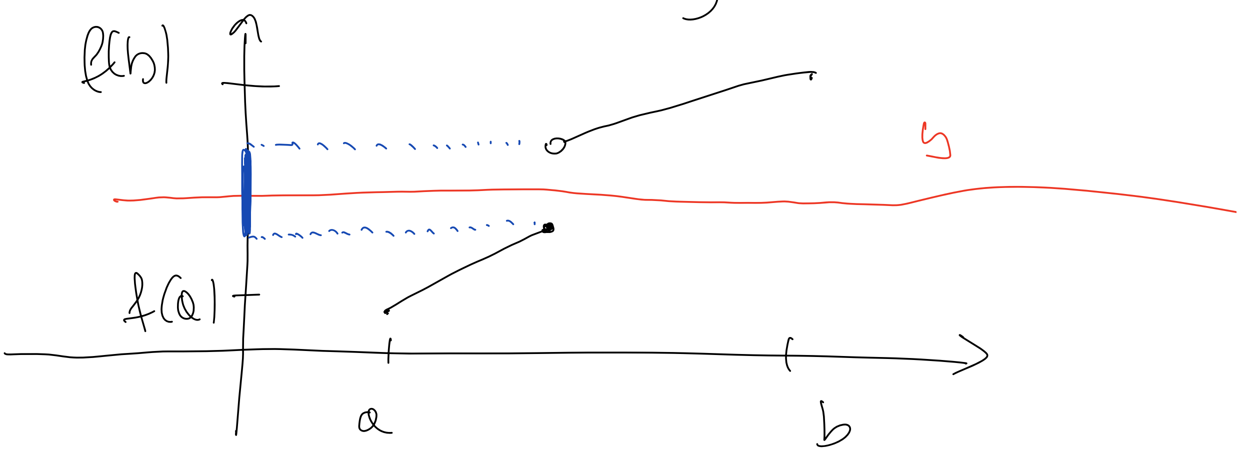
E $f(a) < f(b)$.

ALLORA $\forall y : f(a) < y < f(b)$

$$\exists\, x_0 \in (a,b) : f(x_0) = y$$



$$f(x_0) = y$$



ESERCIZIO: SIA $p \in [0,1]$ IL PREZZO DI UN BENE SCAMBIATO NEL MERCATO. SIA

$D(p) = \log(2-p)$ LA FUNZIONE DI DOMANDA

$S(p) = p$ LA " " OFFERTA.

SI DICE CHE $p_0 \in [0,1]$ È UN PREZZO DI EQUILIBRIO ECONOMICO SE $D(p_0) = S(p_0)$.

SI DIMOSTRI CHE ESISTE ALMENO UN PREZZO DI EQUILIBRIO

SOLUZIONE: SIA $f(p) = S(p) - D(p) = p - \log(2-p)$

$$f(0) = 0 - \log(2) = -\log(2) < 0$$

$$f(1) = 1 - \log(1) = 1 > 0$$

E LA FUNZIONE $f(p) = p - \log(2-p)$ È OVVIAMENTE CONTINUA IN $[0,1]$. QUINDI PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI POSSO DIRE CHE $\exists\, p_0$ TALE CHE $f(p_0) = 0 = S(p_0) - D(p_0)$

$$\Rightarrow S(p_0) = D(p_0)$$

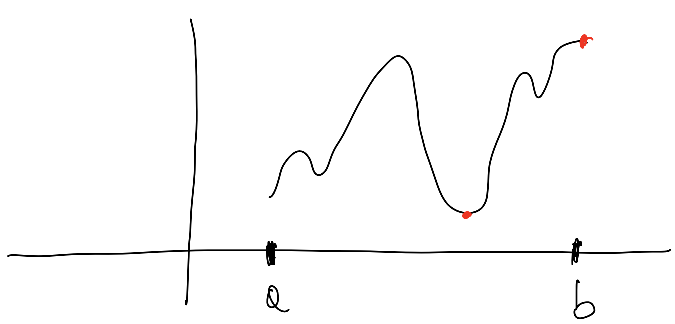
DEF: SIA $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SI DICE CHE f HA UN MASSIMO / MINIMO NEL PUNTO $x_0 \in [a,b]$ SE

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (\leq) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

$f(x_0)$ SI CHIAMA ALLORA VALORE MINIMO / MASSIMO DI f IN $[a,b]$

TEOREMA DEI VALORI ESTREMI DI WEIERSTRASS:

SIA $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $[a,b]$. ALLORA f AMMETTE SIA UN MASSIMO CHE UN MINIMO IN $[a,b]$.

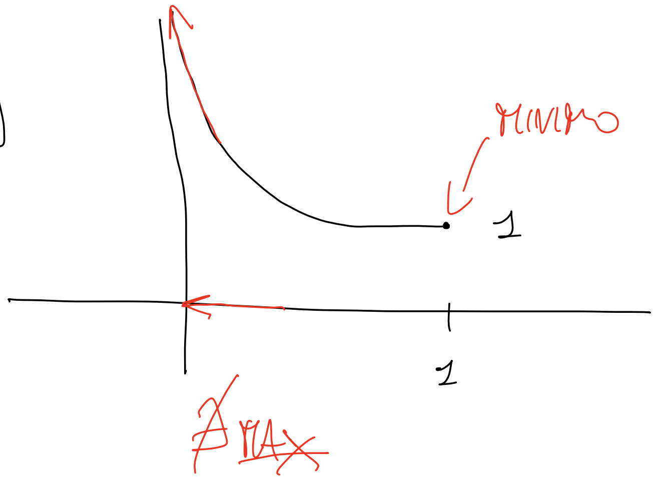


ESEMPIO: $f(x) = \frac{1}{x}$ $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

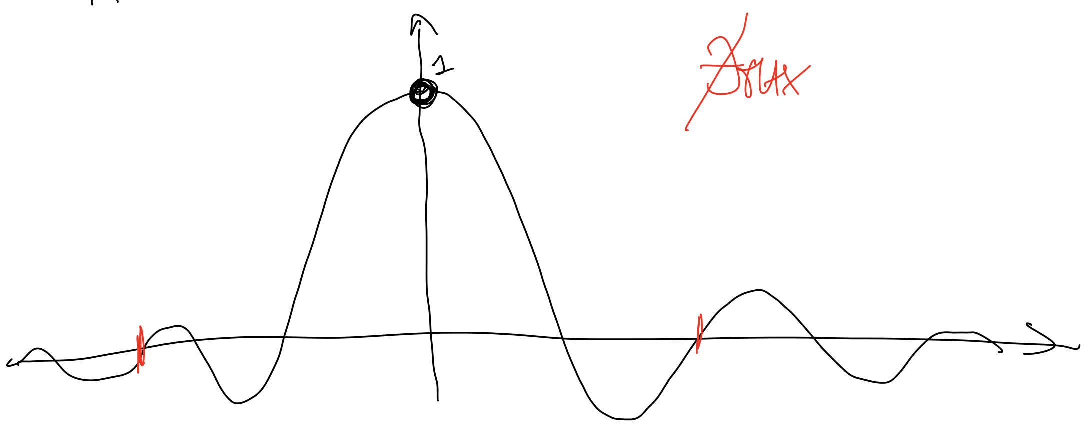
$f(x) = \frac{1}{x}$ $D = (0, 1]$

f é CONTINUA SU $(0, 1]$

MA $(0, 1]$ NON é CHIUSO

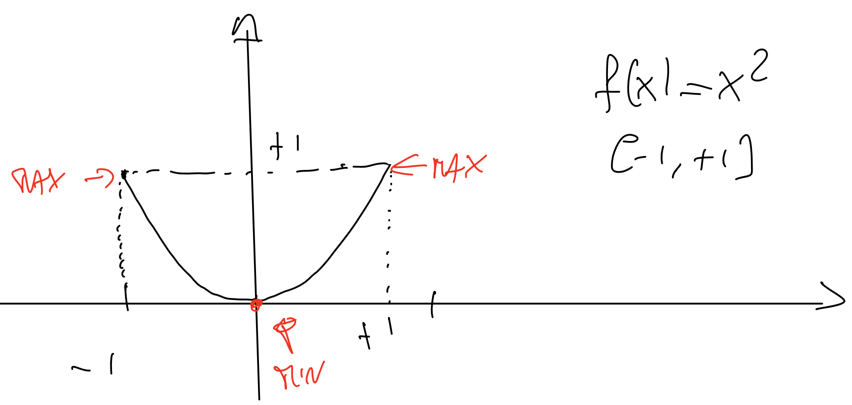


$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$



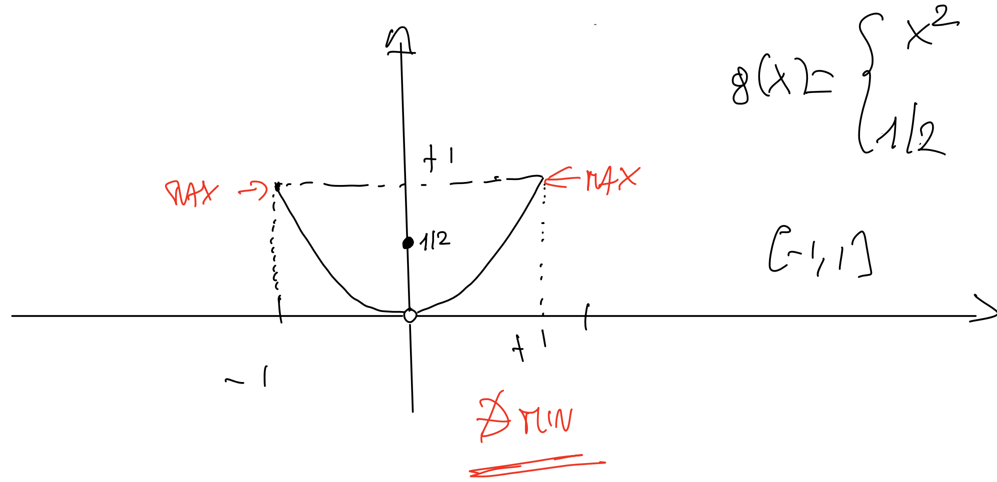
$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

POSSO APPLICARE WEIERSTRASS PER OGNI $[a, b]$



$f(x) = x^2$

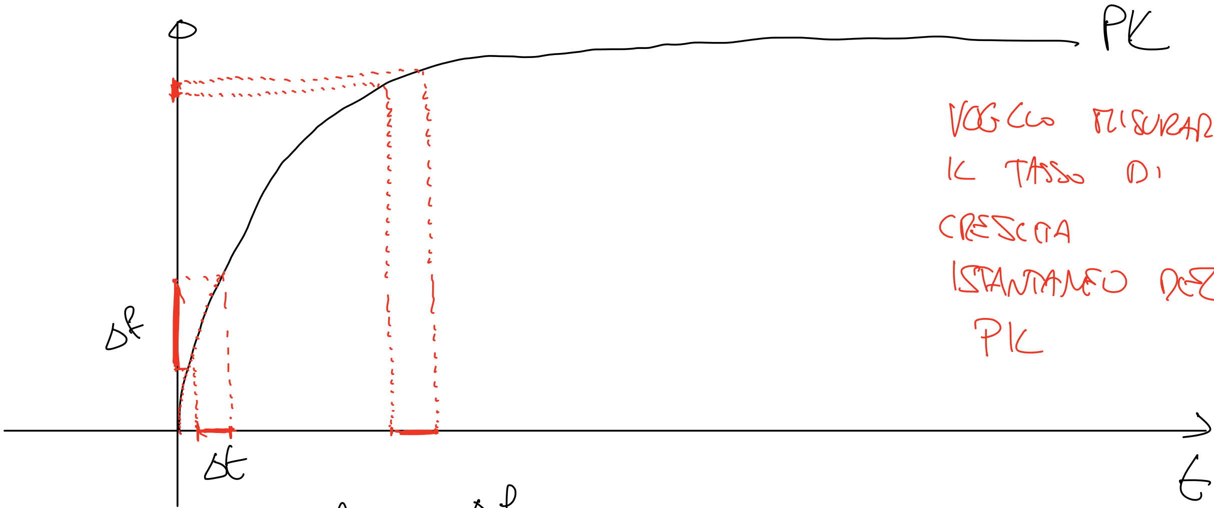
$[-1, +1]$



$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1/2 & x = 0 \end{cases}$$

$[-1,1]$

SIA $f(t)$ LA FUNZIONE CHE RAPPRESENTA IL PIL DI UNA NAZIONE ALL'ISTANTE t



VOGLIO MISURARE IL TASSO DI CRESCITA ISTANTANEO DEL PIL

$$\exists \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} =$$ TASSO DI CRESCITA ISTANTANEO DEL PIL

DEF: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE E SIA x_0 UN PUNTO INTERNO DI D. SI DICE CHE f È DERIVABILE IN x_0 SE ESISTE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

SE x_0 È UN PUNTO DI BORDO DI D ALLORA È POSSIBILE DEFINIRE

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0^+) \quad \text{DERIVATA DESTRA}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0^-) \quad \text{DERIVATA SINISTRA}$$

SE f È DERIVABILE IN OGNI PUNTO $x \in D$ ALLORA È BEN DEFINITA LA FUNZIONE

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

TEO: SE f È DERIVABILE IN x_0 ALLORA f È CONTINUA IN x_0.

DIM:

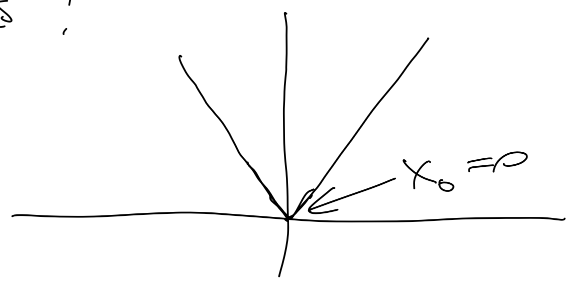
$$\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = \frac{\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)}{h} \cdot h$$

$$\lim_{h\to 0} \left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}_{f'(x_0)} \cdot \underset{\to 0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$ OVVERO f È CONTINUA IN x_0

DOMANDA: SE f É CONTINUA IN x_0 POSSO DIRE CHE É DERIVABILE?

$f(x) = |x|$



$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = +1$$

QUINDI $\nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ OVVERO f NON É DERIVABILE IN $x_0 = 0$, PUR ESSENDO CONTINUA.