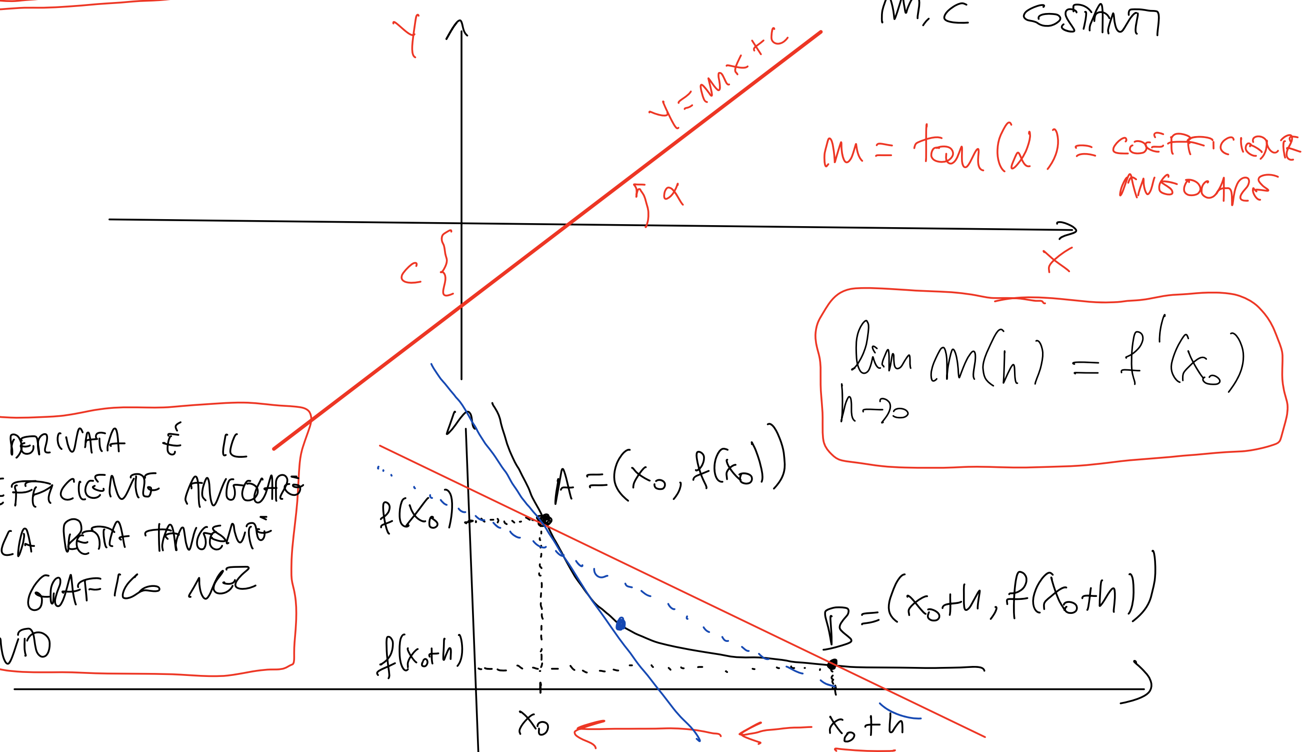
DERIVATA: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E SIA x_0 UN PUNTO INTERNO DI D (ESEMPIO: $D = [a,b]$, $x_0 \in (a,b)$). SI DICE CHE f È DERIVABILE IN x_0 SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

INTERPRETAZIONE: $f'(x_0)$ È LA VARIAZIONE ISTANTANEA DI f IN x_0

EQUAZIONE DI UNA RETTA: $y = mx + c$ $\quad x$ = VARIABILE, m, c COSTANTI



$$\boxed{\lim_{h \to 0} m(h) = f'(x_0)}$$

LA DERIVATA È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO NEL PUNTO

IMPONGO CHE A E B APPARTENGANO ALL'EQUAZIONE $y = mx + c$

1) IMPONGO CHE A APPARTENGA:

$$1)\quad f(x_0) = m x_0 + c$$

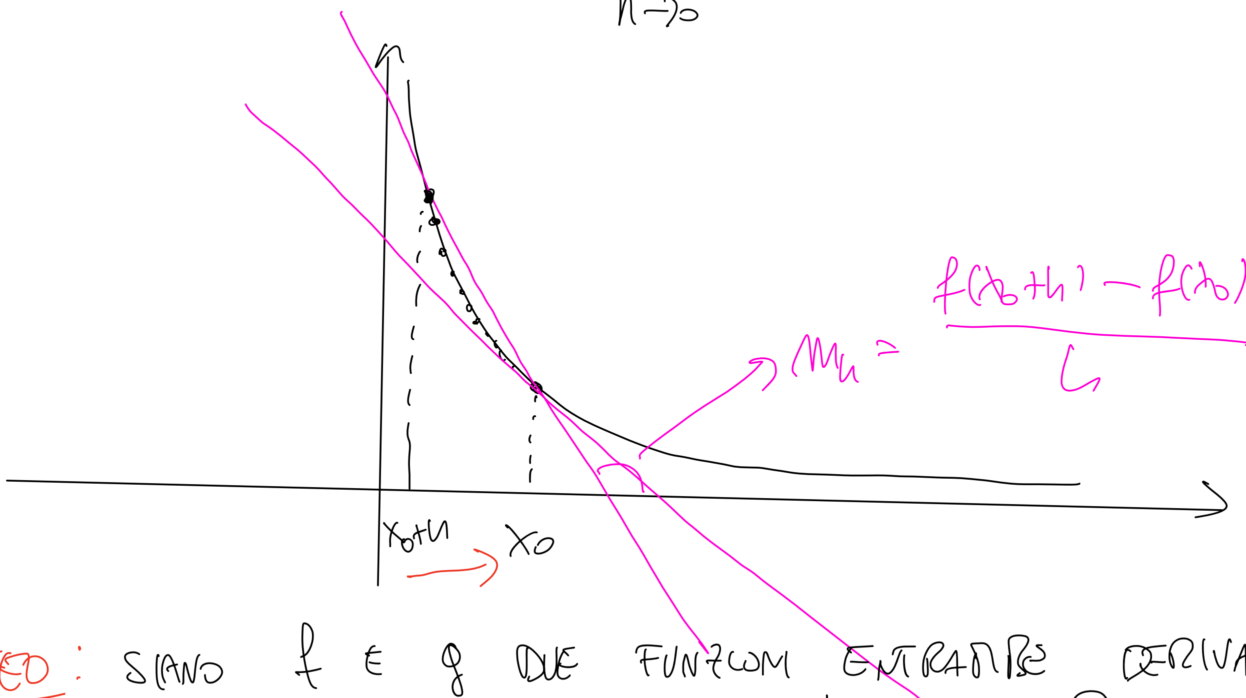
2) IMPONGO CHE B APPARTENGA:

$$2)\quad f(x_0+h) = m(x_0+h) + c = m x_0 + m \cdot h + c$$

$2) - 1) \Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) = m\cancel{x_0} + m \cdot h + \cancel{c} - \cancel{m x_0} - \cancel{c}$

$$m(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

SE ESISTE $f'(x_0)$ HO CHE $\lim\limits_{h \to 0} m(h) = f'(x_0)$



TEO: SIANO f E g DUE FUNZIONI ENTRAMBE DERIVABILI IN UN PUNTO x_0. ALLORA $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ COSTANTI LA FUNZIONE $\alpha f + \beta g$ È DERIVABILE IN x_0 E LA SUA DERIVATA È $\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

LA DERIVATA È QUINDI UN OPERATORE LINEARE.

INOLTRE IL PRODOTTO $f \cdot g$ È DERIVABILE E SI HA CHE:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

DIM: VOGLIO CALCOLARE IL SEGUENTE LIMITE

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0+h)\cdot g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}+\underbrace{g(x_0)}_{g(x_0)}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}\right]$$

POICHÉ f É DERIVABILE IN x_0 SI HA CHE f É CONTINUA IN x_0 QUINDI $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0)$$

CVD

TEO: SIA $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ E SIA $g: E\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ TALE CHE $I_f\subseteq E$. SUPPONIAMO CHE f SIA DERIVABILE IN x_0 E CHE g SIA DERIVABILE IN $f(x_0)$. ALLORA LA FUNZIONE COMPOSTA $(g\circ f)$ É DERIVABILE IN x_0 E SI HA CHE

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

ESEMPIO: $f(x) = x^n$ $\quad n\in\mathbb{N}$ $\quad x_0\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} =$$

$$(x_0+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k = \binom{n}{0} x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} \cdot h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^n} + n\cdot x_0^{n-1}\cdot h + \binom{n}{2} x_0^{n-2}\cdot h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n - \cancel{x_0^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[n\cdot x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right] = n\cdot x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\to 0 \qquad\qquad \to 0$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE LA FUNZIONE $f(x) = x^n$ È DERIVABILE OVUNQUE E SI HA CHE

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

$$(x^5)' = 5x^4 \qquad (x^3)' = 3x^2$$

ESEMPIO: $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$, $a > 1$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x\cdot a^h - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a^x \, \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log(a)$$

VEDERE NOTE SETTIMANA SCORSA.

$$(a^x)' = a^x \cdot \log(a) \Rightarrow$$
$$(e^x)' = e^x$$

ESEMPIO: $f(x) = \log_a(x)$ $\quad 0 < a < 1,\ a > 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \log_a\left[\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\log_a(e)$$

$\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \to e$

VEDERE NOTE SETTIMANA SCORSA

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \log_a(e)$$
$$(\log(x))' = \frac{1}{x}$$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

ESEMPIO: $f(x) = \sin(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} =$$

$\to 0$ $\quad \to 1$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right] = \cos(x)$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$(\cos(x))' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' =$$

REGOLA DI DERIVAZIONE FUNZIONI COMPOSTE

$$\boxed{(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\overbrace{x' + \left(\frac{\pi}{2}\right)'}^{1}\right) =$$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$x^\alpha = e^{\log(x^\alpha)}$$

ESEMPIO: $f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0$

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\log(x^\alpha)}\right)' = \left(e^{\alpha \log(x)}\right)' = e^{\alpha \log(x)} \cdot (\alpha \log(x))'$$

$$x \rightarrow \alpha \log(x) \rightarrow e^{\alpha \log(x)}$$

$$= e^{\log(x^\alpha)} \cdot \left(\frac{\alpha}{x}\right)$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$$= \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\, x^{\frac{2}{3}-1} = \dots$$

$$\left(x^{\pi}\right)' = \pi\, x^{\pi-1}$$

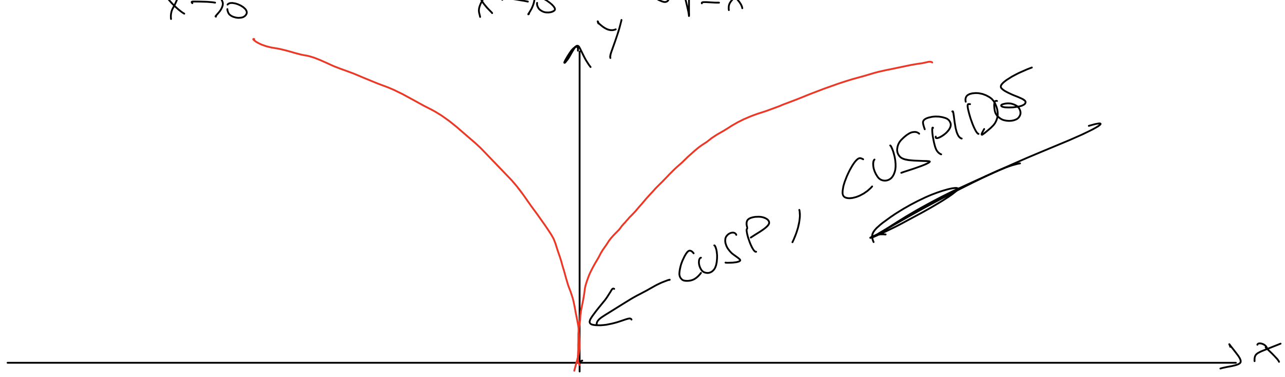
ESEMPIO: $f(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad D = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(-x)^{\frac{1}{2}-1}(-1)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$$



SE f È TALE CHE

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$$

SI DICE CHE f HA UNA CUSPIDE IN x_0

DEF: SE f È DERIVABILE IN x_0 E $f'(x_0) = 0$ ALLORA x_0 È DETTO UN PUNTO CRITICO PER f.

ESERCIZIO: SIA $f(x) = x^x$. TROVARE TUTTI I SUOI PUNTI CRITICI.

$D = (0, \infty)$ $\quad f(x) = x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x\log(x)}$

$$f'(x) = \left(e^{x\log(x)}\right)' = e^{x\log(x)} \cdot \left(x\log(x)\right)' =$$

$$= x^x \cdot \left(x\log(x)\right)' = x^x\left((x)'\log(x) + x \cdot (\log(x))'\right)$$

$$= x^x \cdot \left(\log(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\log(x) + 1)$$

$$(x^x)' = x^x \cdot \underline{(\log(x) + 1)} = 0$$

PER QUALI x SI HA CHE $f'(x) = 0$??

$$\log(x) + 1 = 0 \qquad \log(x) = -1$$

$x^x > 0 \quad \forall x$ $\qquad e^{\log(x)} = e^{-1}$

$\log(x)+1=0 \Rightarrow x = e^{-1}$ $\qquad x = \frac{1}{e}$

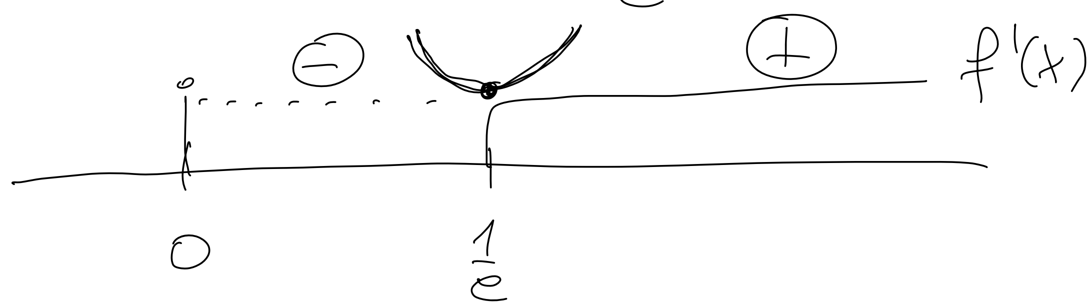
ESISTE SOLTANTO UN PUNTO CRITICO E TALE PUNTO È $x_0 = \frac{1}{e} = e^{-1}$

PER QUALI X SI HA CHE $f'(x) > 0$?

$$\underbrace{x^x}_{>0} \cdot \left(\log(x)+1\right) > 0 \quad !$$

$$\log(x)+1>0 \Rightarrow \log(x) > -1$$

$$\Rightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$$



OVVERO $x=\frac{1}{e}$ È UN MINIMO LOCALE