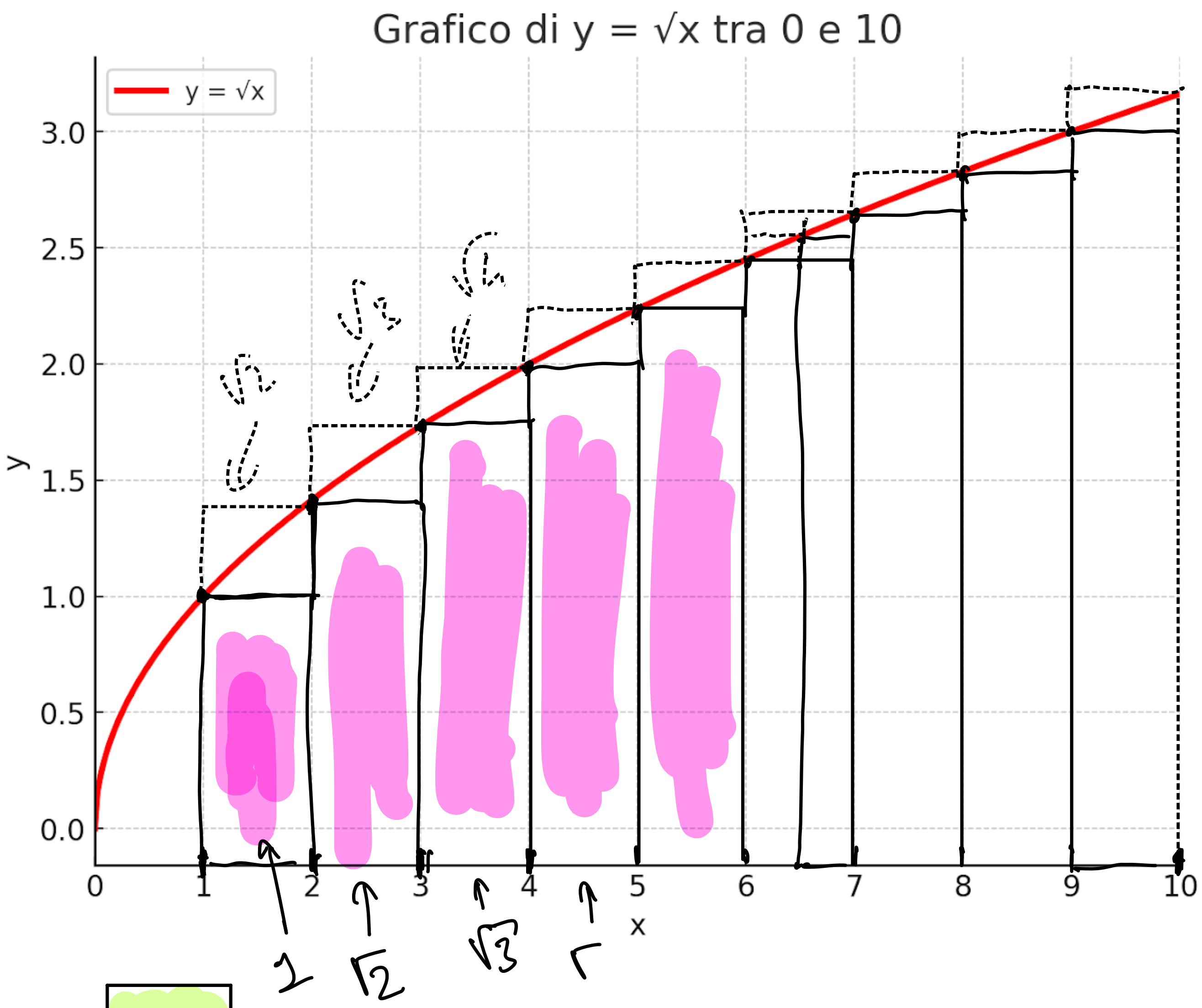
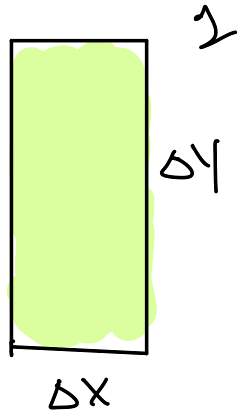




$$A = \Delta X \cdot \Delta Y$$

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots + \sqrt{9} =$$

DEFINIZIONE: SIA $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. UNA PARTIZIONE DI $[a,b]$ È UNA QUALSIASI COLLEZIONE DI PUNTI

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ TALI CHE}$$

$$\underline{x_0 = a} < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < \underline{x_n = b}$$

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE LIMITATA OVVERO

$$\underline{m \le f(x) \le M} \quad \forall\, x \in [a,b]$$

SIA $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ UNA PARTIZIONE DI $[a,b]$

DEFINISCO:

$$m_j = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j] \} \quad j = 1, \dots, n$$

$$M_j = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j] \}$$

$$\Delta_j x = x_j - x_{j-1}$$

SUPERIORE

SI CHIAMA SOMMA DI RIEMANN INFERIORE RELATIVA ALLA PARTIZIONE $\mathcal{P}$ LA QUANTITÀ

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \Delta_j x \Leftarrow$$

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot \Delta_j x$$

SE $n \uparrow \qquad L(\mathcal{P}, f) \uparrow \qquad U(\mathcal{P}, f) \downarrow$

SUPERIORE

SI CHIAMA INTEGRALE INFERIORE DI RIEMANN DI f IN $[a,b]$ LA QUANTITÀ

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{P} U(P,f)$$

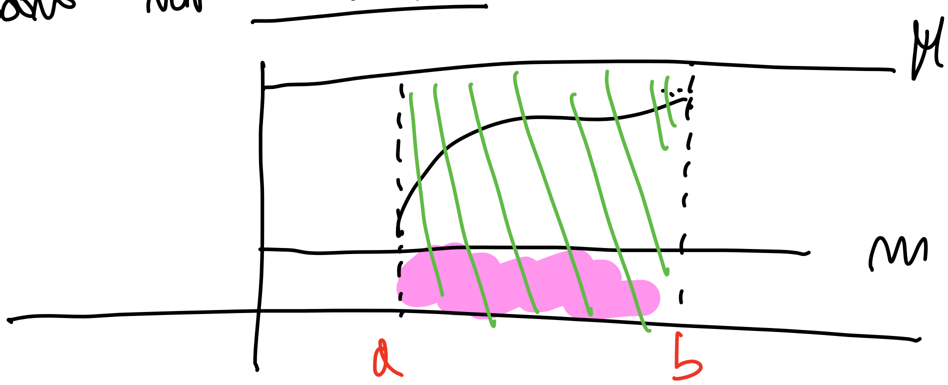
SE $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ ALLORA f SI DICE RIEMANN- INTEGRABILE IN $[a,b]$ E SI PONE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dX$$

SICCOME $m \leq f(x) \leq M$ $\Rightarrow$

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M\cdot(b-a)$$

$\Rightarrow$ $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ E $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ SONO SEMPRE DEFINITI MA POSSONO NON <u>COINCIDERE</u>!



ESEMPIO DI FUNZIONE LIMITATA MA NON INTEGRABILE:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

FUNZIONE DI DIRICHLET

$x \in [0,1]$

$L(f,P) = 0 \qquad \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f = 0$

$U(f,P) = 1 \qquad \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f = 1$

TEO: SE f È CONTINUA IN $[a,b]$ ALLORA f È INTEGRABILE IN $[a,b]$

TEO: SE f È RIEMANN - INTEGRABILE IN $[a,b]$ E
g " " " " "
ALLORA $c_1 f + c_2 g$, CON $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ È RIEMANN - INTEGRABILE IN $[a,b]$ E

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

ANCHE $f \cdot g$ È RIEMANN - INTEGRABILE
ANCHE $|f|$ È RIEMANN - INTEGRABILE E

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$f(x_{j-1})$

SE f È RIEMANN-INTEGRABILE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

CONSIDERANDO UNA QUALSIASI PARTIZIONE

$$P = \{x_0, \dots, x_n\}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$$

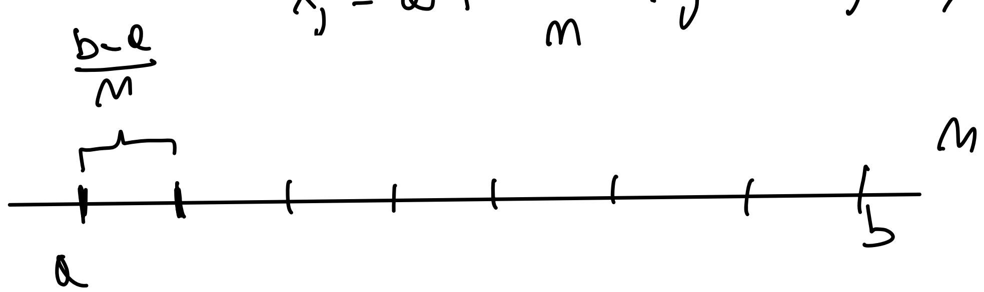
$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(q_j)(x_j - x_{j-1}) \quad , \; q_j \in (x_{j-1}, x_j)$$

ESEMPI DI INTEGRALI ELEMENTARI CALCOLATI USANDO LA DEFINIZIONE:

$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [a,b]$

CONSIDERIAMO PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ LA PARTIZIONE EQUI-SPAZIATA:

$$x_j = a + \frac{b-a}{n}\cdot j \qquad j = 0, \dots, n$$



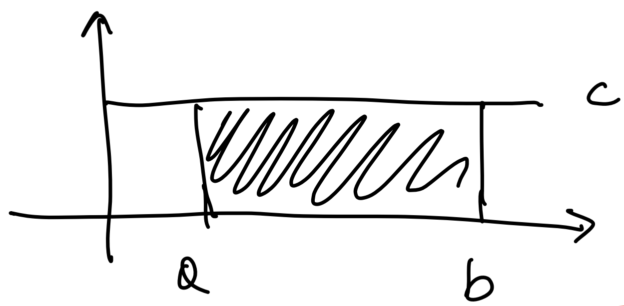
$$x_0 = a \qquad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n} \quad \ldots$$

$$x_n = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = a + b - a = b$$

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} c \cdot \frac{b-a}{n} = c \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} 1$$

$$= c \cdot \frac{b-a}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}$$

$$= c \cdot (b-a)$$



$$\Downarrow$$

$$f(x) = x \qquad [a,b] \qquad \boxed{x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}} \Rightarrow x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \frac{b-a}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(a + j \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(a + j\,\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \left[n \cdot a + \sum_{j=1}^{n} j \left(\frac{b-a}{n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \left[n \cdot a + \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} j\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \left[n \cdot a + \frac{b-a}{n} \, \frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \, \frac{n^2+n}{2}\right]$$

$$= a\cdot(b-a)+\lim_{n\to+\infty}\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n^2+n}{2} = ab-a^2+\frac{1}{2}(b-a)^2$$

$$\frac{1}{2}$$

$$= ab-a^2+\frac{1}{2}(b^2+a^2-2ab)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2-a^2) = \int_a^b x\,dx$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (# 1)

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE RIEMANN-INTEGRABILE IN $[a,b]$ E SIA $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ LA FUNZIONE

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(FUNZIONE INTEGRALE)}$$

SE f È CONTINUA IN x_0 ALLORA F È DERIVABILE IN x_0 E $F'(x_0) = f(x_0)$

DIM:
$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h} - f(x_0)\right|$$

$h>0$

$$= \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\cdot h}{h}\right|$$

$$= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt}{h} \right| \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt}{h} \leq$$

ESSENDO f CONTINUA IN x_0 SE t È SUFFICIENTEMENTE VICINO A x_0 ALLORA $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dt}{h} = \varepsilon \cdot \frac{h}{h} = \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt < \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dt = \varepsilon$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) = F'(x_0^+)$$

USANDO UN RAGIONAMENTO IDENTICO DIMOSTRO CHE

$$F'(x_0^-) = f(x_0)$$