Perché abbiamo bisogno delle matrici?

- Organizzazione di dati (numerici) e esecuzione di operazioni utili/analisi significative su di essi.
- Qualsiasi problema regolare può essere approssimato da un problema lineare (ovvero, da un sistema lineare).
- È disponibile un numero di algoritmi efficienti per la risoluzione di sistemi lineari.

Una matrice è un arrangiamento rettangolare di numeri.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

La dimensione di una matrice è indicata dal numero delle sue righe e dal numero delle sue colonne.

Una matrice con k righe e n colonne è chiamata matrice $k \times n$ ("k per n").

Usiamo anche la notazione $A \in \mathcal{M}(k \times n)$ per indicare che A è una matrice $k \times n$.

Il numero nella riga i e nella colonna j è chiamato elemento (i, j)-esimo ed è denotato da a_{ij}.

Otteniamo una matrice quadrata se $k = n$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A volte siamo interessati solo a una parte delle informazioni raccolte in una matrice. Ad esempio, nell'esempio della libreria la matrice M è data da

	Negozio	
Oggetto venduto	A	B
Libri	45	64
Giornali	6	8
Riviste	11	7

Siamo interessati solo a libri e giornali. La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 45 & 64 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

é chiamata *una sottomatrice* di M.

Definizione

Una sottomatrice di una matrice A è qualsiasi matrice ottenuta da A rimuovendo intere righe e/o colonne.

Esempio

Dato

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono tutte sottomatrici di A

Come oggetti matematici, si possono fare operazioni con le matrici. Con opportune ipotesi possiamo

- Sommare/Sottrarre matrici
- Moltiplicare una matrice per un numero
- Moltiplicare matrici
- Invertire una matrice

Siano $A, B \in \mathcal{M}(k \times n)$ due matrici della stessa dimensione, ovvero con lo stesso numero di righe e colonne.

- Definiamo $C = A + B$.
  C è una matrice $k \times n$ con elementi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Definiamo $D = A - B$.
  D è una matrice $k \times n$ con elementi $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Esempio di Somma

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Allora $C = A + B$ è data da

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

e $D = A - B$ è data da

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

La matrice nulla $O_{k \times n} \in \mathcal{M}(k \times n)$ è una matrice le cui entrate sono 0.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una identità additiva o matrice neutra, cioè $A + O_{k \times n} = A$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ uno scalare (cioè un numero) e sia $A \in \mathcal{M}(k \times n)$ una matrice. Possiamo definire la matrice $L = \lambda A$.

L è una matrice $(k \times n)$ con entrate $\ell_{ij} = \lambda a_{ij}$

Example

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora $L = 2A$ è data da

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Proprietà dell'addizione di matrici e della moltiplicazione per uno scalare

Teorema

Siano $A, B, C \in \mathcal{M}(k \times n)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Abbiamo le seguenti proprietà

1. $A + B = B + A$ (legge commutativa dell'addizione di matrici)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (legge associativa dell'addizione di matrici)
3. $A + O_{k\times n} = A$ (O è la matrice neutra per l'addizione)
4. $A + (-A) = O_{k\times n}$
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Compito: Dimostrare il teorema.

La trasposta di una matrice A di dimensione $k \times n$ è una matrice $n \times k$ denotata da $A^\top$ ottenuta scambiando righe e colonne di A.

Example

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora $A^\top$ è data da

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà della trasposta

Definizione

Sia $A \in \mathcal{M}(k \times n)$, la trasposta di A è la matrice $A^\top \in \mathcal{M}(n \times k)$ con entrate $a_{ij}^\top = a_{ji}$.

Teorema

Siano $A, B \in \mathcal{M}(k \times n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Abbiamo le seguenti proprietà

1. $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
2. $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$
3. $(A^\top)^\top = A$

Compito: Dimostrare il teorema.

Una matrice con esattamente una colonna è chiamata un vettore.

Le entrate di un vettore sono chiamate componenti.

L'insieme di tutti i vettori colonna con k componenti è $\mathbb{R}^k$

Example

$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

A volte usiamo la notazione $\mathrm{u} = (1, -2, 3)^\top$, per risparmiare spazio.

Per ogni $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^k$ scriviamo $\mathrm{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$, o $\mathrm{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)^\top$.

Poiché i vettori sono matrici speciali possiamo sommare/sottrarre vettori della stessa lunghezza, possiamo moltiplicare i vettori per uno scalare ed ereditano le stesse proprietà delle matrici.

1. Per ogni $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^k$ definiamo $\mathrm{w} = \mathrm{u} + \mathrm{v} \in \mathbb{R}^k$ con componenti $w_i = u_i + v_i$.
2. Per ogni $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^k$ definiamo $\mathrm{z} = \mathrm{u} - \mathrm{v} \in \mathbb{R}^k$ con componenti $z_i = u_i - v_i$.
3. Per ogni $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^k$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definiamo $\lambda \mathrm{u} = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_k)^\top \in \mathbb{R}^k$.
4. L'elemento neutro in $\mathbb{R}^k$ è il vettore $\mathrm{o} = (0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^k$

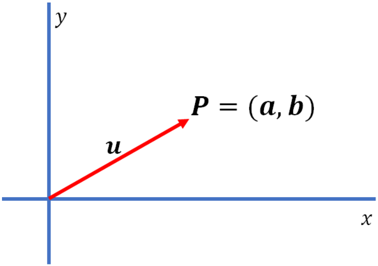
Corollario

Per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^k$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo che

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. $u + o = u$
4. $u + (-u) = o$
5. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
6. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

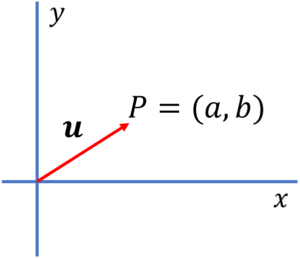
Per molte applicazioni è conveniente rappresentare i vettori geometricamente come un segmento di linea diretto o frecce.

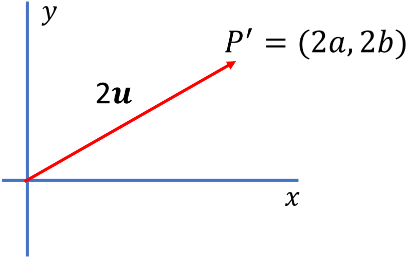
Per esempio, se $\mathrm{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è un vettore in $\mathbb{R}^2$, allora possiamo rappresentare il vettore come un segmento dall'origine al punto (a, b).

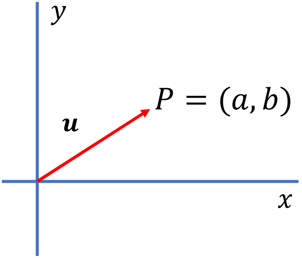


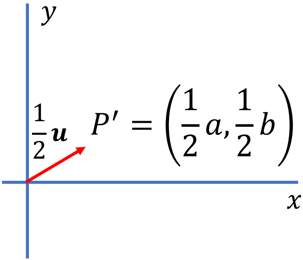
Se moltiplichiamo un vettore per uno scalare positivo otteniamo un segmento con la stessa pendenza e direzione ma di lunghezza diversa. Se lo scalare è negativo, invertiamo la direzione.

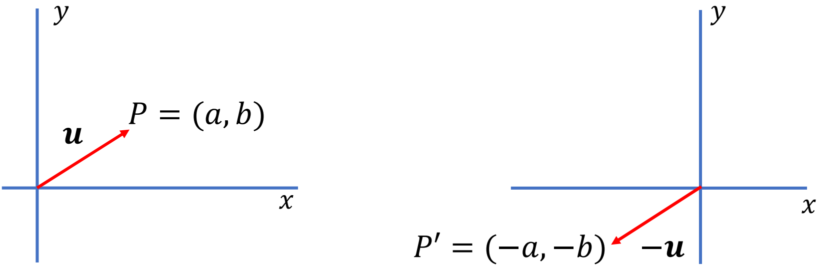
Se sommiamo due vettori con pendenze e direzioni diverse otteniamo un vettore la cui pendenza e direzione si ottiene dalla legge del parallelogramma.


y
u
P = (a, b)
x


y
P′ = (2a, 2b)
2u
x

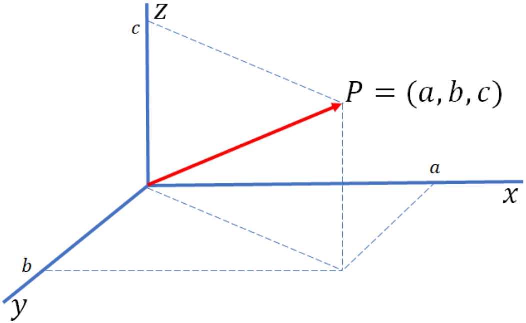

y
$\boldsymbol{u}$
$P = (a, b)$
x


y
$\frac{1}{2}\boldsymbol{u}$
$P' = \left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right)$
x



y
$\boldsymbol{u}$
$P = (a, b)$
x
y
x
$P' = (-a, -b)$
$-\boldsymbol{u}$

Analogamente, i vettori in $\mathbb{R}^3$ possono essere rappresentati come frecce nello spazio tridimensionale.



Definizione

Una combinazione lineare di vettori $u_1, u_2, \ldots, u_p \in \mathbb{R}^k$ è un vettore della forma

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_p u_p \in \mathbb{R}^k$$

per scalari $c_1, c_2, \ldots, c_p$, che sono chiamati i coefficienti della combinazione lineare.

Possiamo sempre scrivere qualsiasi vettore come una combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Infatti $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono chiamati i vettori standard in $\mathbb{R}^2$.

Analogamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono vettori standard in $\mathbb{R}^3$.

In generale, abbiamo la seguente definizione

Definizione

I vettori $e_1, \dots e_k \in \mathbb{R}^k$ dati da

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono chiamati i vettori standard in $\mathbb{R}^k$.

Ogni vettore $\mathsf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ può essere scritto come una combinazione lineare dei vettori standard $\mathsf{e}_1, \ldots \mathsf{e}_k \in \mathbb{R}^k$.

Infatti,

$$\mathsf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = u_1\mathsf{e}_1 + u_2\mathsf{e}_2 + \ldots u_k\mathsf{e}_k$$

Sia $A \in \mathcal{M}(k \times n)$ e $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$. Allora $\mathrm{w} = A \cdot \mathrm{u} \in \mathbb{R}^k$ dato da

$$\mathrm{w} = u_1 \mathrm{a}_1 + u_2 \mathrm{a}_2 + \cdots + u_n \mathrm{a}_n$$

dove $\mathrm{a}_1, \ldots \mathrm{a}_n$ sono le colonne della matrice A e $\mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Un caso particolare: Siano $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^k$, allora $\mathrm{u}^\top \cdot \mathrm{v}$ è un numero reale dato da

$$\mathrm{u}^\top \cdot \mathrm{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_k v_k$$

Definizione

La matrice identità $I_n \in \mathcal{M}(n \times n)$ è una matrice quadrata con entrate uguali a 1 sulla diagonale e 0 altrimenti,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione

La matrice identità $I_n \in \mathcal{M}(n \times n)$ è una matrice quadrata le cui colonne sono i vettori standard in $\mathbb{R}^n$.

Proprietà: La matrice identità è un identità moltiplicativa, cioè per ogni vettore $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$ abbiamo che

$$I_n \cdot \mathrm{v} = \mathrm{v}.$$

Dimostrazione. Elementare.

Teorema

Siano $A, B \in \mathcal{M}(k \times n)$, $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

1. $A \cdot (\mathrm{u} + \mathrm{v}) = A \cdot \mathrm{u} + A \cdot \mathrm{v}$
2. $A \cdot (\lambda \mathrm{u}) = \lambda A \cdot \mathrm{u}$
3. $(A + B) \cdot \mathrm{u} = A \cdot \mathrm{u} + B \cdot \mathrm{u}$
4. $A \cdot \mathrm{e}_j = \mathrm{a}_j$ dove a_j è la j-esima colonna di A
5. $A \cdot \mathrm{o}_n = \mathrm{o}_k$, dove o_n è il vettore zero in $\mathbb{R}^n$ e o_k è il vettore zero in $\mathbb{R}^k$
6. $O_{k \times n} \cdot \mathrm{v} = \mathrm{o}_k$ dove $O_{k \times n}$ è la matrice nulla $k \times n$
7. $I_n \cdot \mathrm{v} = \mathrm{v}$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$

Sia $A \in \mathcal{M}(k \times n)$ e $B \in \mathcal{M}(n \times m)$, allora $P = A \cdot B$ è una matrice $k \times m$ le cui colonne sono date da

$$\mathrm{p}_1 = A \cdot \mathrm{b}_1, \quad \mathrm{p}_2 = A \cdot \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{p}_m = A \cdot \mathrm{b}_m$$

Notare che questo è solo una ripetizione del prodotto matrice-vettore.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3 \times 2), \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 2)$$

Allora $P = AB \in \mathcal{M}(3 \times 2)$ con colonne

$$\mathrm{p}_1 = A\mathrm{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{p}_2 = A\mathrm{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cioè

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 3), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3 \times 2)$$

Allora $P = AB \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ con colonne

$$\mathrm{p}_1 = A\mathrm{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

p_{11} = 1a riga di A per 1a colonna di B $\Rightarrow (2 \;\; -1 \;\; 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

p_{21} = 2a riga di A per 1a colonna di B $\Rightarrow -5$

$$\mathrm{p}_2 = A\mathrm{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

p_{12} = 1a riga di A per 2a colonna di $B \Rightarrow 5$

p_{22} = 2a riga di A per 2a colonna di $B \Rightarrow 0$

Infine,

$$P = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione

Una proprietà importante! Il prodotto di matrici NON è commutativo

Teorema

Proprietà del prodotto di matrici Siano $A, B \in \mathcal{M}(k \times n)$, $C \in \mathcal{M}(n \times m)$ e $P, Q \in \mathcal{M}(m \times l)$. Otteniamo che:

1. $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $(AC)P = A(CP)$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $C(P + Q) = CP + CQ$
5. $I_k A = A = A I_n$
6. $AO_{n\times m} = O_{k\times m}$
7. $(AC)^\top = C^\top A^\top$

Fino ad ora, abbiamo imparato a *moltiplicare* le matrici. Possiamo dividere le matrici?

Per i numeri reali, sappiamo che $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Allo stesso modo vogliamo definire l'operazione di moltiplicazione per l'*inverso* di una matrice.

Definizione

Sia $A \in \mathcal{M}(n \times n)$. Diciamo che A è **invertibile** se esiste una matrice $B \in \mathcal{M}(n \times n)$ tale che

$$AB = BA = I_n.$$

B è chiamata l'inversa di A

In seguito denoteremo l'inversa di A con A^{-1}.

L'inversa di una matrice 2×2

Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ data da

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $ad - cb \neq 0$. Allora

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Osservazione

Una matrice 2×2 è invertibile se e solo se $ad - cb \neq 0$.

E per le matrici di dimensioni superiori? Abbiamo bisogno di più strumenti matematici

Teorema

Siano $A, P \in \mathcal{M}(n \times n)$ e **invertibili**. Allora

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$
3. AP è invertibile e $(AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}$

Quando è una matrice invertibile?

Dobbiamo sviluppare la nozione di determinante.

Determinante

- $n = 1$ Una matrice 1×1 è un numero reale $a \in \mathbb{R}$. Definiamo $\det(a) = a$.
- $n = 2$ Sia
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
definiamo $\det(A) = ad - cb$
- $n \geq 3$ Per dimensioni superiori il determinante ha una definizione più complicata che richiede definizioni aggiuntive

Per qualsiasi matrice quadrata $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ denotiamo con A_{ij} la matrice ottenuta da A eliminando la riga i e la colonna j

Notare che possiamo esprimere il determinante di una matrice 2×2 in termini di queste matrici *ridotte*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = a \det(A_{11}) - b \det(A_{12})$

Definizione (Determinante)

Per qualsiasi $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ il determinante di A è dato da

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

Definiamo $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$. Questo coefficiente è chiamato cofattore.

Quindi possiamo riscrivere il determinante come:

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}$$

Questa equazione è chiamata l'espansione dei cofattori.

Definizione (Determinante (definizione equivalente))

Per qualsiasi $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ il determinante di A è dato da

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}$$

Teorema

Il determinante di una matrice **diagonale, triangolare inferiore o superiore** è il prodotto dei suoi elementi diagonali.

Teorema (Proprietà dei determinanti)

Siano $A, B \in \mathcal{M}(n \times n)$. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$
2. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
3. $\det(A^\top) = \det(A)$
4. Se A è invertibile allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
5. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Osservazione: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Definizione

Sia $A \in \mathcal{M}(n \times n)$. Definiamo la matrice dei cofattori di A, $Cof(A)$, la matrice di tutti i cofattori di A, cioè la matrice con le entrate c_{ij}.

Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ e invertibile. Allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (Cof(A))^{\top}$$